Chapitre 14

Les suites réelles

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

0. Définition

Définition 1.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$. *L'image de l'entier* n *est noté* u_n.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ *; une suite réelle* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *est une application de* $\mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Plus généralement une suite réelle est une application d'une partie infinie I *de* $\mathbb{N}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Dans ce cours, toutes les suites considérées seront définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$. On pourra les noter (u_n) ou $(u_n)_n$ plutôt que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Tous les résultats établis restent vrais pour une suite réelle quelconque ; il suffira de changer dans les définitions et propriétés "$\forall n \in \mathbb{N}$" par "$\forall n \in I$".

1. Définitions de la limite d'une suite

1.1. Convergence et divergence.

Définition 2.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(ou* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$*) a pour* <u>*limite le réel* ℓ</u> *si :*
– Pour tout $\varepsilon > 0$, *l'intervalle* $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \ell$$

Plus formellement : $\lim u_n = \ell$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque.
• L'entier N dépend de ε ; on peut le noter $N(\varepsilon)$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

• Rappelons que :

$$u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \iff |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Exemples.
• Une suite (u_n) constante égale à $a \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$) a pour limite a. En effet, soit $\varepsilon > 0$, en prenant $N = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0 \implies |u_n - a| = 0 \leqslant \varepsilon$.
• Plus généralement, une <u>suite (u_n) stationnaire</u> en $a \in \mathbb{R}$ (. *i.e.* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n = a$, c'est à dire constante à partir d'un certain rang) a pour limite a. En effet, soit $\varepsilon > 0$, en prenant $N = n_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies |u_n - a| = 0 \leqslant \varepsilon$.

• Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrons que $\lim u_n = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Prenons pour $N(\varepsilon)$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors soit $n \geqslant N(\varepsilon)$:

$$n \geqslant N(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon \implies |u_n - 0| \leqslant \varepsilon$$

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $a \in \mathbb{R}$; alors $\lim(u_n + a) = \ell + a$. En effet :
Soit $\varepsilon > 0$; par définition il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \implies |(u_n + a) - (\ell + a)| = |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |(u_n + a) - (\ell + a)| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, $\lim(u_n + a) = \ell + a$.
De même : $\lim u_n = \ell \implies \lim(a \times u_n) = a \times \ell$. En effet :
Si $a = 0$: la suite $0 \times u_n$ est constante égale à 0, et donc $\lim 0 \times u_n = 0 = 0 \times \ell$.
Si $a \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$; posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$. Puisque $\lim u_n = \ell$:

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N &\implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|a|} \\ &\implies |a \times u_n - a \times \ell| = |a| \times |u_n - \ell| \leqslant |a| \times \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon\end{aligned}$$

et donc on a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies |a \times u_n - a \times \ell| \leqslant \varepsilon$.
On résume ces résultats :

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante :

$$\lim u_n = \ell \implies \lim(u_n + a) = \ell + a$$
$$\lim u_n = \ell \implies \lim(a \times u_n) = a \times \ell$$

Définition 3.
Une suite (u_n) ayant une limite $\ell \in \mathbb{R}$ est dite convergente. Elle converge vers ℓ. Sinon on dit que (u_n) est divergente.

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente : En effet, sinon il existerait $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant N(\varepsilon) \implies u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.
En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies (-1)^n \in \left[\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}\right]$$

Mais c'est impossible puisque $(-1)^n$ et $(-1)^{n+1}$ sont à distance 2 l'un de l'autre tandis que $\left[\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}\right]$ est un intervalle d'amplitude 1. Plus rigoureusement : d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant N$:

$$2 = \left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = \left|(-1)^n - \ell + \ell - (-1)^{n+1}\right| \leqslant \left|(-1)^n - \ell\right| + \left|\ell - (-1)^{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Remarque. Déterminer la nature d'une suite consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente ; elle ne peut être que l'un ou l'autre.

Définition 4.
• *Une suite (u_n) convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ est dite tendre vers ℓ par valeur supérieure, que l'on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^+ \quad ou \quad \lim u_n = \ell^+$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\ell, \ell+\varepsilon]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
Autrement dit, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) \implies \ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

• *Elle est dite tendre vers ℓ par valeur inférieure, que l'on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^- \quad ou \quad \lim u_n = \ell^-$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
Autrement dit, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$$

Exemple.
• $\lim \frac{1}{n} = 0^+$; en effet : Soit $\varepsilon > 0$. Prenons pour $N(\varepsilon)$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors soit $n \geqslant N(\varepsilon)$:

$$n \geqslant N(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \implies 0 < \frac{1}{n} \leqslant 0 + \varepsilon$$

• $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1^-$; en effet : en effet : Soit $\varepsilon > 0$. Prenons pour $N(\varepsilon)$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors soit $n \geqslant N(\varepsilon)$:

$$n \geqslant N(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \implies -\varepsilon \leqslant -\frac{1}{n} < 0 \implies 1 - \varepsilon \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$$

Propriété 1.
La limite d'une suite convergente est unique

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe ℓ_1 et ℓ_2 deux réels, avec $\ell_1 \neq \ell_2$ et :

$$\lim u_n = \ell_1 \qquad ; \qquad \lim u_n = \ell_2$$

Ainsi par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(\varepsilon) \implies \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2(\varepsilon) \implies \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Puisque $\ell_1 \neq \ell_2$, on peut supposer sans perte de généralité que $\ell_1 < \ell_2$, ou autrement dit que $\ell_2 - \ell_1 > 0$. Alors en considérant $\varepsilon > 0$ tel que :

$$0 < \varepsilon < \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

pour tout $n \geqslant \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$:

$$u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon < \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} = \frac{\ell_2 + \ell_1}{2} = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \implies u_n < u_n$$

ce qui est contradictoire. ■

1.2. Limites infinies.

Définition 5.
Soit (u_n) une suite réelle.
• *La suite (u_n) a pour limite $+\infty$, ce que l'on note :*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad ou \qquad \lim u_n = +\infty$$
lorsque :
Pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
Autrement dit, si :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$$
• *La suite (u_n) a pour limite $-\infty$, ce que l'on note :*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \qquad ou \qquad \lim u_n = -\infty$$
lorsque :
Pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
Autrement dit, si :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \leqslant A$$

Exemples.
• Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n$. Alors $\lim u_n = +\infty$; en effet :
Soit $A \in \mathbb{R}$; Des que N est un entier naturel supérieur ou égal à A, on a :
$$n \geqslant N \implies u_n = n \geqslant A$$
Il suffit de prendre $N = \max(0, \lfloor A \rfloor + 1)$ qui est bien un entier naturel $\geqslant A$.
• Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - 2n$. Alors $\lim u_n = -\infty$; en effet :
Soit $A \in \mathbb{R}$;
$$u_n \leqslant A \iff 1 - 2n \leqslant A \iff 2n - 1 \geqslant -A \iff n \geqslant \frac{1-A}{2}$$
Dès que N est un entier naturel supérieur ou égal à $\frac{1-A}{2}$, on a :
$$n \geqslant N \implies n \geqslant \frac{1-A}{2} \implies u_n \leqslant A$$
Il suffit de prendre $N = \max\left(\left\lfloor \frac{1-A}{2} \right\rfloor + 1, 0\right)$ qui est bien un entier naturel $\geqslant \frac{1-A}{2}$.

• Soit (u_n) une suite ayant pour limite $\pm\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$ une contante ; alors $\lim(u_n + a) = \lim u_n$. En effet :
Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque ; considérons $A_1 = A - a \in \mathbb{R}$.
Si $\lim u_n = +\infty$ alors par définition il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$$n \geqslant N \implies u_n \geqslant A_1 = A - a \implies u_n + a \geqslant A$$
donc pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N \implies (u_n + a) \geqslant A$; autrement dit : $lim(u_n + a) = +\infty$.
Si $\lim u_n = -\infty$ alors par définition il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$$n \geqslant N \implies u_n \leqslant A_1 = A - a \implies u_n + a \leqslant A$$

donc pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N \implies (u_n + a) \leqslant A$; autrement dit : $lim(u_n + a) = -\infty$.

> *Soient $a \in \mathbb{R}$ une constante et (u_n) une suite ayant une limite infinie ; alors :*
> $$\lim u_n = +\infty \implies \lim(u_n + a) = +\infty$$
> $$\lim u_n = -\infty \implies \lim(u_n + a) = -\infty$$

• Soit (u_n) une suite ayant pour limite $\pm\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$ une contante ; alors la suite $(a \times u_n)$ a pour limite

$$\lim u_n = \pm\infty \implies \lim(a \times u_n) = \begin{cases} \lim u_n = \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ -\lim u_n = \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

En effet :

– Si $a = 0$: alors la suite $(a \times u_n)$ est constante égale à 0. Elle a donc pour limite 0.

– Si $a \neq 0$: Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque ; posons $A_1 = \frac{A}{a}$. Alors par définition :

$$\lim u_n = +\infty \implies \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant A_1 = \frac{A}{a} \implies \begin{cases} a \times u_n \geqslant A & \text{si } a > 0 \\ a \times u_n \leqslant A & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim u_n = -\infty \implies \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \leqslant A_1 = \frac{A}{a} \implies \begin{cases} a \times u_n \leqslant A & \text{si } a > 0 \\ a \times u_n \geqslant A & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

C'est vrai pour $A \in \mathbb{R}$, c'est donc vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$, autrement dit :

$$\lim u_n = +\infty \implies \begin{cases} \lim a \times u_n = +\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim a \times u_n = -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \lim u_n = -\infty \implies \begin{cases} \lim a \times u_n = -\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim a \times u_n = +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

> *Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante,*
> $$\lim u_n = \pm\infty \implies \begin{cases} \lim(a \times u_n) = \pm\infty & si\ a > 0 \\ \lim(a \times u_n) = 0 & si\ a = 0 \\ \lim(a \times u_n) = \mp\infty & si\ a < 0 \end{cases}$$

• Des résultats précédents, on déduit la limite d'une suite arithmétique :

> *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :*
> $$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ u_0 & si\ r = 0 \\ -\infty & si\ r < 0 \end{cases}$$

• La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a aucune limite, finie ou infinie. On a deja montré que (u_n) est divergente.

Soit $A = 2$; alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < A$; donc (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$.

Soit $A = -2$; alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > A$; donc (u_n) n'a pas pour limite $-\infty$.

> **Propriété 2.**
> *La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.*

Démonstration. La propriété 1 établit deja que la limite d'une suite convergente est unique. Il reste donc à montrer que si une suite (u_n) admet une limite infinie, elle ne peut pas en admettre une autre, finie ou infinie.
Montrons d'abord que l'on ne peut pas avoir $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$. Procédons par l'absurde. Dans le cas contraire on aurait :

$$\begin{aligned}
&\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_1(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(A) \implies u_n \geqslant A \qquad \text{car } \lim u_n = +\infty \\
\text{et } &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_2(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2(A) \implies u_n \leqslant A \qquad \text{car } \lim u_n = -\infty
\end{aligned}$$

En appliquant la première assertion pour $A = 1$ et la deuxième pour $A = 0$ on a alors :

$$\begin{aligned}
&\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies u_n \geqslant 1 \\
\text{et } &\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies u_n \leqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ et donc :

$$1 \leqslant u_n \leqslant 0 \implies 1 \leqslant 0$$

C'est contradictoire. Ainsi on ne peut pas avoir en même temps $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$.
Montrons ensuite que si $\lim u_n = \pm\infty$ alors la suite (u_n) est divergente ; pour cela procédons par l'absurde (on suppose $\lim u_n = +\infty$; l'autre cas est analogue) :
Supposons que $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et que (par exemple) $\lim u_n = +\infty$; alors :

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(\varepsilon) \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \\
\text{et } &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_2(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2(A) \implies u_n \geqslant A
\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $A = \ell + 2\varepsilon$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant \max(N_1(\varepsilon), N_2(A)) \implies \begin{cases} n \geqslant N_1(\varepsilon) \\ \text{et} \\ n \geqslant N_2(A) \end{cases} \implies \begin{cases} \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \\ \text{et} \\ u_n \geqslant A = \ell + 2\varepsilon \end{cases}$$

$$\implies u_n \leqslant \ell + \varepsilon < \ell + 2\varepsilon \leqslant u_n \implies u_n < u_n$$

Ce qui est contradictoire. ■

Remarque. Pour une suite réelle les possibilités sont :

$$\text{Suite réelle } (u_n) \begin{cases} \text{Convergente : } \exists\ \ell \in \mathbb{R},\ \lim u_n = \ell \\ \text{ou bien} \\ \text{Divergente : } \begin{cases} \text{Aucune limite} \\ \text{ou bien} \\ \text{Limite infinie : } \begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \text{ou bien} \\ \lim u_n = -\infty \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Remarque. Nature et limite d'une suite ne dépendent pas de ses premiers termes : si on modifie les premier termes d'une suite (u_n) on ne change ni sa nature (convergente/divergente) ni sa limite.
Autrement dit si deux suite (u_n) et (v_n) sont telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies u_n = v_n$, alors (u_n) et (v_n) ont même nature, et même limite, s'il en est.

1.3. **Propriétés sur les limites.**

1.3.1. *Limites et valeur absolue.*

Propriété 3.
Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\lim u_n = \ell \iff \lim |u_n - \ell| = 0$$
En particulier :
$$\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0$$

Démonstration. Par définition :
$$\lim u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
Or $||u_n - \ell| - 0| = |u_n - \ell|$
$$\begin{aligned} &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies ||u_n - \ell| - 0| \leqslant \varepsilon \\ &\iff \lim |u_n - \ell| = 0 \end{aligned}$$
■

Propriété 4.
Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$; alors :
$$\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$$

Démonstration. Par définition :
$$\lim u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
Or d'après l'inégalité triangulaire $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
$$\begin{aligned} &\implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies ||u_n| - |\ell|| \leqslant \varepsilon \\ &\implies \lim |u_n| = |\ell| \end{aligned}$$
■

Remarque. Attention la réciproque est fausse :
Par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge tandis que $|u_n| = 1$ converge.

1.3.2. *Limite et signe d'une suite.*

Propriété 5.
Soit (u_n) une suite réelle ayant pour limite :
$$\begin{cases} \lim u_n = \ell > 0 \\ \text{ou} \\ \lim u_n = +\infty \end{cases}$$
Alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$. Autrement dit :
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n > 0$$

Remarque. Autrement dit, une suite ayant une limite > 0 ou $+\infty$ est > 0 à partir d'un certain rang.

Démonstration. On distingue deux cas selon que (u_n) converge ou diverge vers $+\infty$.

1^er^ cas : $\lim u_n = +\infty$; par définition :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$$
en prenant $A > 0$, on a :
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant A > 0$$
on a donc la conclusion recherchée.
2^eme^ cas : $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$; par définition :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
Prenons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$; alors $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$n \geqslant N \implies \underbrace{-\varepsilon \leqslant u_n - \ell} \leqslant \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \implies \frac{\ell}{2} \leqslant u_n \underset{\ell>0}{\implies} 0 < u_n$$
On a la conclusion recherchée. ■

Exemple. En particulier :
$$\lim u_n = +\infty \implies \lim |u_n| = +\infty$$
En effet, si $\lim u_n = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$$n \geqslant N \implies u_n > 0 \implies u_n = |u_n|.$$
Les suites (u_n) et $(|u_n|)$ coïncident donc à partir d'un certain rang, elle ont donc même limite.

Ce résultat a pour principal intérêt le corollaire important suivant :

Corollaire 6. Passage à la limite dans une inégalité
Soient (u_n) une suite convergente et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- *Si à partir d'un certain rang $u_n \geqslant a$, alors $\lim u_n \geqslant a$.*
- *Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant b$, alors $\lim u_n \leqslant b$.*

Démonstration. Notons $\ell = \lim u_n$; on montre séparément les deux assertions.
• Si $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant a$.
Considérons la suite $a - u_n$; elle a pour limite le réel $a - \ell$. Si l'on avait $a - \ell > 0$, alors d'après la propriété, on aurait à partir d'un certain rang $a - u_n > 0$. Or $n \geqslant N \implies a - u_n \leqslant 0$. Donc nécessairement $a - \ell \leqslant 0$, c'est à dire $\lim u_n \geqslant a$.
• Si $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \leqslant b$.
Considérons la suite $u_n - b$; elle a pour limite le réel $\ell - b$. Si l'on avait $\ell - b > 0$, alors d'après la propriété, on aurait à partir d'un certain rang $u_n - b > 0$. Or $n \geqslant N \implies u_n - b \leqslant 0$. Donc nécessairement $\ell - b \leqslant 0$, c'est à dire $\lim u_n \leqslant b$. ■

1.3.3. *Limites et suites bornées.*

Définition 6.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite <u>bornée</u> lorsque le sous-ensemble $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est borné.
C'est à dire si :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$
ou de manière équivalente si :
$$\exists A \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant A.$$

Théorème 7.
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Alors par définition il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que :

$$n \geqslant N(\varepsilon) \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

En particulier l'ensemble :

$$A = \Big\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant N(\varepsilon) \Big\}$$

est borné : il est minoré mar $m_1 = \ell - \varepsilon$ et majoré par $M_1 = \ell + \varepsilon$.

Considérons l'ensemble des termes restants de la suite :

$$B = \Big\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n < N(\varepsilon) \Big\}$$

c'est un ensemble fini de $\mathbb{R}$ et il est donc borné ; minoré par $m_2 = \min(B)$ et majoré par $M_2 = \max(B)$.

En posant : $m = \min(m_1, m_2)$ et $M = \max(M_1, M_2)$ on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} m \leqslant m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \leqslant M \\ \text{ou} \\ m \leqslant m_2 \leqslant u_n \leqslant M_2 \leqslant M \end{cases} \implies m \leqslant u_n \leqslant M$$

Ainsi la suite (u_n) est bornée. ∎

Propriété 8.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad \textit{et} \qquad (v_n) \textit{ est bornée}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \times v_n) = 0$$

Démonstration. Puisque $\lim u_n = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

et puisque (v_n) est bornée :

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leqslant M \tag{2}$$

Montrons que $\lim u_n v_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Alors d'après (1) :

$$\exists N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon_1) \implies |u_n| \leqslant \varepsilon_1$$
$$\underset{(2)}{\implies} |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant \varepsilon_1 \times M = \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$$

i.e. $\lim u_n v_n = 0$. ∎

Exercice 1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.

1.3.4. *Caractérisation de la limite à l'aide des termes de rangs pairs et impairs.*

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
- *$(u_{2n})_n$ est la suite extraite des termes de rangs pairs,*
- *$(u_{2n+1})_n$ est la suite extraite des termes de rangs impairs.*

Exemples. Autrement dit :

$$\begin{aligned}(u_n) &= (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, \ldots)\\ (u_{2n}) &= (u_0, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{16}, \ldots)\\ (u_{2n+1}) &= (u_1, u_3, u_5, u_7, u_9, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{17}, \ldots)\end{aligned}$$

• Pour la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$. La suite extraite de rangs pairs, (u_{2n}), est constante égale à 1. La suite extraite de rangs impairs, (u_{2n+1}), est constante égale à -1. La suite (u_n) n'a pas de limite.

Théorème 9.
Soit $L \in \mathbb{R} \cup \Big\{ -\infty; +\infty \Big\}$; une suite (u_n) a pour limite L si et seulement si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite L.

Démonstration. Montrons deux implications :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lim u_n = L$ et montrons que $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$.

• 1^er cas : si $L \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

$$\text{en particulier : } n \geqslant N \implies \begin{cases} 2n \geqslant N \\ 2n+1 \geqslant N \end{cases} \implies \begin{cases} |u_{2n} - L| \leqslant \varepsilon \\ |u_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_{2n} - L| \leqslant \varepsilon \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_{2n} = L$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_{2n+1} = L$$

• 2^eme cas : si $L = +\infty$.

$$\begin{aligned}&\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant A \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_n = +\infty\\ \implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_{2n} \geqslant A \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_{2n} = +\infty\\ \implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_{2n+1} \geqslant A \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_{2n+1} = +\infty\end{aligned}$$

• 3^eme cas : si $L = -\infty$.

$$\begin{aligned}&\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \leqslant A \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_n = -\infty\\ \implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_{2n} \leqslant A \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_{2n} = -\infty\\ \implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_{2n+1} \leqslant A \qquad \text{i.e.} \quad \lim u_{2n+1} = -\infty\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$ et montrons que $\lim u_n = L$.

• 1^{er} cas : si la limite est finie, $L \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition, puisque $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies |u_{2n} - L| \leqslant \varepsilon$$
$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1 \implies |u_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$ et soit $n \geqslant N$.
– Si n est pair : $n = 2k$; alors :

$$\begin{aligned} n \geqslant N \implies n \geqslant 2N_0 \implies 2k \geqslant 2N_0 \implies k \geqslant N_0 &\implies |u_{2k} - L| \leqslant \varepsilon \\ &\implies |u_n - L| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

– Si n est impair : $n = 2k + 1$; alors :

$$\begin{aligned} n \geqslant N \implies n \geqslant 2N_1 + 1 \implies 2k + 1 \geqslant 2N_1 + 1 \implies k \geqslant N_1 &\implies |u_{2k+1} - L| \leqslant \varepsilon \\ &\implies |u_n - L| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies |u_n - L| \leqslant \varepsilon$, et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit $\lim u_n = L$.
• 2^{eme} cas : si $L = +\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque. Par définition, puisque $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \implies u_{2n} \geqslant A$$
$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies u_{2n+1} \geqslant A$$

Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$ et soit $n \geqslant N$.
– Si n est pair : $n = 2k$; alors :

$$\begin{aligned} n \geqslant N \implies n \geqslant 2N_0 \implies 2k \geqslant 2N_0 \implies k \geqslant N_0 &\implies u_{2k} \geqslant A \\ &\implies u_n \geqslant A \end{aligned}$$

– Si n est impair : $n = 2k + 1$; alors :

$$\begin{aligned} n \geqslant N \implies n \geqslant 2N_1 + 1 \implies 2k + 1 \geqslant 2N_1 + 1 \implies k \geqslant N_1 &\implies u_{2k+1} \geqslant A \\ &\implies u_n \geqslant A \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$, et donc :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$$

autrement dit $\lim u_n = L$.
• $3^{\text{eme}} cas$: si $L = -\infty$.
Le même argument que précédemment s'applique (changer toutes les inégalités $u_* \geqslant A$ en $u_* \leqslant A$). ■

Exercice 2. Soit : $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
1) Montrer que la suite extraite (u_{2n}) est convergente.
2) Montrer que la suite extraite (u_{2n+1}) est divergente.
3) En déduire la nature de (u_n).

1.3.5. *Théorèmes de limites par encadrement.*

Dans le cas d'une limite finie, c'est le théorème des gendarmes :

Théorème 10.
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim u_n = \lim w_n = \ell$$

et un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N_0 \implies u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

alors la suite (v_n) est convergente et $\lim v_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition :

$$\exists N_u \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_u \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

$$\exists N_w \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_w \implies |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

et par hypothèse :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \implies u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Posons $N = \max(N_0, N_u, N_w)$; pour tout entier $n \geqslant N$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon \implies |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

par définition, $\lim v_n = \ell$. ∎

Exercice 3.
Appliquer le théorème des gendarmes pour montrer que les suites suivantes sont convergentes et déterminer leur limite :

$$u_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} \quad ; \quad v_n = \frac{\lfloor 1 - n/3 \rfloor}{n} \quad ; \quad w_n = \frac{\sqrt{n^2 - n + 100}}{n}$$

Dans le cas d'une limite infinie, le résultat devient :

Théorème 11.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \implies u_n \leqslant v_n$$

Alors :

$$\lim u_n = +\infty \implies \lim v_n = +\infty$$
$$\lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\lim u_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies u_n \geqslant A$$

Posons $N = \max(N_0, N_1)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \implies v_n \geqslant u_n \geqslant A$$

et donc $\lim v_n = +\infty$.
Supposons ensuite que $\lim v_n = -\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies v_n \leqslant A$$

Posons $N = \max(N_0, N_1)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \implies u_n \leqslant v_n \leqslant A$$

et donc $\lim u_n = -\infty$. ■

Exercice 4.
Déterminer nature et limite éventuelle de :

$$u_n = (2 + (-1)^n)n \qquad v_n = (-2 + (-1)^n)n \qquad w_n = (1 + (-1)^n)n$$

2. Calcul de limites

2.1. Opérations sur les limites.

On établit dans cette partie l'effet des opérations usuelles : somme, produit, et quotient de suites, sur leur limite. Lorsque c'est possible on donne la limite en fonction des limites des deux suites opérandes.

On regroupe ces résultats au sein de tableaux. une limite ℓ ou ℓ' désignera une limite finie. Une limite IND désignera une limite indéterminée, c'est à dire qu'on ne peut pas déduire en toute généralité (voire pas de limite du tout).

Pour établir chaque tableau, il y a beaucoup de points à démontrer. Afin de ne pas alourdir le cours, on ne démontrera que certains d'entre eux, les plus essentiels, les autres étant admis ; une preuve s'obtiendrait en appliquant des arguments analogues.

2.1.1. *Limite d'une somme.*

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND

Remarque. Autrement dit, en étendant l'addition de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \Big\{ -\infty; +\infty \Big\}$ en posant :

$$\begin{array}{lcl} \ell + (+\infty) = +\infty & ; & \ell + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty & ; & (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) + (-\infty) = IND & ; & (-\infty) + (+\infty) = IND \end{array}$$

la limite d'une somme est la somme des limites ; $(+\infty) + (-\infty)$ *est indéterminé.*

Démonstration. On se contente de montrer les deux premières. La preuve des restantes est analogue.

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$. Montrons que $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(\varepsilon) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{car } \lim u_n = \ell$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2(\varepsilon) \implies |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon \qquad \text{car } \lim v_n = \ell'$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$; posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$; alors :

$$\exists N_1(\varepsilon') \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(\varepsilon') \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon' \qquad (1)$$
$$\exists N_2(\varepsilon') \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2(\varepsilon') \implies |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon' \qquad (2)$$

Posons $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon'), N_2(\varepsilon'))$. Puisque

$$n \geqslant N(\varepsilon) \implies \begin{cases} n \geqslant N_1(\varepsilon') \\ \text{et} \\ n \geqslant N_2(\varepsilon') \end{cases}$$

d'après $(*)$, (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) \implies |(u_n+v_n)-(\ell+\ell')| \underset{(*)}{\leqslant} |u_n-\ell|+|v_n-\ell'| \underset{(1)\text{ et }(2)}{\leqslant} \varepsilon'+\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) \implies |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit : $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$. □

• Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = +\infty$. Montrons que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

Puisque $\lim v_n = +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_1(A) \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(A) \implies v_n \geqslant A$$

Puisque $\lim u_n = \ell$ et qu'une suite convergente est bornée, (u_n) admet un minorant que nous noterons m :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m \tag{1}$$

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque ; posons $B = A - m$; alors :

$$\begin{aligned}\exists N_1(B) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(B) &\implies v_n \geqslant B\\ &\underset{(1)}{\implies} u_n + v_n \geqslant m + A - m = A\end{aligned}$$

Ainsi en posant $N(A) = N_1(B)$:

$$\exists N(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(A) \implies u_n + v_n \geqslant A$$

On a donc établi que :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(A) \implies u_n + v_n \geqslant A$$

autrement dit $\lim(u_n + v_n) = +\infty$. ■

Remarque. Cas d'indétermination : "$(+\infty) + (-\infty)$".

– Soit $u_n = n$ et $v_n = -n$; $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. Alors $u_n + v_n = 0$ a une limite finie.

– Soit $u_n = 2n$ et $v_n = -n$; $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. Alors $u_n + v_n = n$ a pour limite $+\infty$.

– Soit $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$; $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. Alors $u_n + v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

On voit sur ces 3 exemples que dans le cas "$+\infty + (-\infty)$" on ne peut rien dire sur la limite : ni si elle existe, ni si elle est finie ou infinie.

2.1.2. *Limite d'un produit.*

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	IND

où le signe devant ∞ s'obtient à l'aide de la règle sur le signe d'un produit.

Remarque. Autrement dit, en étendant la multiplication de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ en respectant la règle des signes d'un produit et en posant :

$$\ell \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \ell > 0 \\ \mp\infty & \text{si } \ell < 0 \\ IND & \text{si } \ell = 0 \end{cases} \quad ; \quad \infty \times \infty = \infty$$

la limite d'un produit est le produit des limites ; $0 \times \infty$ est indéterminé.

Démonstration. On ne démontre que les deux premières ; les suivantes sont analogues.
• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$; montrons que $\lim u_n \times v_n = \ell \times \ell'$.
D'après l'inégalité triangulaire :
$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'| \leqslant |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'| \qquad (*)$$
Or (u_n) et convergente donc borné ; ainsi il existe $M > 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M \qquad (**)$$
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$. Par définition, puisque $\lim v_n = \ell'$:
$$\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1(\varepsilon_1) \implies |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (1)$$
– 1^{er} cas : si $\ell' = 0$.
En posant $N(\varepsilon) = N_1(\varepsilon_1)$, d'après $(*)$ et $(**)$ et (1) :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) \implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant |u_n| \cdot |v_n - \ell'| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$
et donc :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon$$
autrement dit $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$.
– 2^{eme} cas si $\ell' \neq 0$.
Posons $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|\ell'|} > 0$; par définition, puisque $\lim u_n = \ell$:
$$\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2(\varepsilon_2) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|\ell'|} \qquad (2)$$
Posons $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))$; alors :
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\varepsilon) &\implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'| && \text{d'après } (*)\\
&\implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\ell'|} \cdot |\ell'| && \text{d'après } (**), (1), (2)\\
&\implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$
ainsi :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon$$
autrement dit $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$. □

• Supposons que $\lim u_n = \ell \neq 0$ et $\lim v_n = +\infty$. Montrons que $\lim(u_n \times v_n) = +\infty$ ou $-\infty$ selon que $\ell > 0$ ou $\ell < 0$. (Le cas où $\lim v_n = -\infty$ se traiterait de manière analogue en changeant le sens de certaines inégalités).
Posons $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$; puisque $\lim u_n = \ell$, par définition :
$$\begin{aligned}
\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 &\implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}\\
&\implies \ell - \frac{|\ell|}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{|\ell|}{2}\\
&\implies \begin{cases} 0 < \dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3\ell}{2} & \text{si } \ell > 0\\ \dfrac{3\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2} < 0 & \text{si } \ell < 0 \end{cases}\\
&\implies \begin{cases} 0 < \dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3\ell}{2} & \text{si } \ell > 0\\ 0 < -\dfrac{\ell}{2} \leqslant -u_n \leqslant -\dfrac{3\ell}{2} & \text{si } \ell < 0 \end{cases} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $A_1 = \dfrac{2A}{\ell} \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim v_n = +\infty$:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies v_n \geqslant A_1 = \frac{2A}{\ell} \tag{2}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$; alors d'après (1) et (2) :

$$n \geqslant N \implies \begin{cases} \text{si } \ell > 0 : & \dfrac{\ell}{2} \times \dfrac{2A}{\ell} \leqslant u_n \times v_n & \implies u_n \times v_n \geqslant A \\ \text{si } \ell < 0 : & -\dfrac{\ell}{2} \times \dfrac{2A}{\ell} \leqslant -u_n \times v_n & \implies u_n \times v_n \leqslant A \end{cases}$$

Ainsi on a montré que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \begin{cases} u_n \times v_n \geqslant A & \text{si } \ell > 0 \\ u_n \times v_n \leqslant A & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\lim u_n \times v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

■

Remarque. Cas d'indéterminé : "$0 \times \infty$" :
– Si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$ alors $\lim u_n v_n = 1$.
– Si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$ alors $\lim u_n v_n = +\infty$.
– Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$ alors $u_n v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Exemple. De $\lim n = +\infty$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$ on déduit par produit :

Soit $p \in \mathbb{Z}$ un entier fixé, $\quad \lim n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$

Méthode. Pour le calcul de la limite d'une somme, en cas d'indéterminé "$+\infty + (-\infty)$" on factorise le terme dominant (celui qui tend le plus rapidement vers ∞) pour appliquer ensuite la limite d'un produit :

Exemples :

• $u_n = n^2 - n^3 - 1 + \dfrac{1}{n^2}$.

$$u_n = -n^3 \times \underbrace{\left(-\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}\right)}_{\longrightarrow 1 \text{ par somme des limites}} \longrightarrow -\infty \quad \text{par produit des limites}$$

• Pour un polynôme, sa limite lorsque $n \to +\infty$ est celle de son monôme de plus haut degré :

$$u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k = a_p n^p \times \underbrace{\left(1 + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{a_p} n^{k-p}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \qquad \text{si } a_p \neq 0$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k \quad \textit{avec } a_p \neq 0 \quad \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_p n^p$$

Exercice 5. Déterminer les limites de :

$$u_n = \frac{n^3 - 2n^4 + n^3 \times \sin(n)}{n^2} \qquad ; \qquad v_n = -(2n-1)^6 - (1-3n)^7$$

2.1.3. *Limite d'un quotient.*

Supposons que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	IND	0	IND

où le signe devant ∞ s'obtient à l'aide de la règle sur le signe d'un produit.

Remarque. Attention, sans autre hypothèse de signe, lorsque $\lim v_n = 0$ la forme est indéterminée. Exemples :

– Si $u_n = 1$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 0$ mais :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{(-1)^n} = (-1)^n n$$

n'a pas de limite car ses suites extraites de rangs pairs et impairs sont $2n$ et $-(2n+1)$ qui n'ont pas même limite.

– Si $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors $\frac{u_n}{v_n} = 1$ converge vers 1.

– Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ alors $\frac{u_n}{v_n} = n$ a pour limite $+\infty$.

Démonstration. On établit les deux premières ; les suivantes se traite de manière analogue.

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell' \neq 0$. On pose $w_n = \frac{1}{v_n}$; montrons que $\lim w_n = \frac{1}{\ell'}$; à l'aide du résultat sur la limite d'une produit on aura alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Puisque $\ell' \neq 0$, à partir d'un certain rang N_0, (v_n) garde un signe constant > 0 ou < 0. D'autre part montrons qu'il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ pour lequel $(|v_n|)_{n \geqslant N_1}$ est minorée par un réel m strictement positif.

Puisque $\lim v_n = \ell' \neq 0$ en posant $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2} > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies |v_n - \ell'| \leqslant \frac{|\ell'|}{2}$$

Or d'après l'inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N_1 \implies |v_n| = |v_n - \ell' + \ell'| \geqslant ||v_n - \ell'| - |\ell'|| \geqslant |\ell'| - |v_n - \ell'| \geqslant |\ell'| - \frac{|\ell'|}{2} = \frac{|\ell'|}{2} > 0$$

Ainsi $|v_n|_{n\geqslant N_1}$ est minorée par $m = \frac{|\ell'|}{2} > 0$. En particulier :

$$\forall n \geqslant N_1,\ |v_n| \geqslant m \implies \frac{1}{|v_n|} \leqslant \frac{1}{m}$$

Ainsi :

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n||\ell'|} \leqslant \frac{|v_n - \ell'|}{m|\ell'|} \quad \text{dès que } n \geqslant N_1 \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; posons $\varepsilon_1 = \varepsilon \times m \times |\ell'| > 0$; puisque $\lim v_n = \ell'$:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon \times m \times |\ell'| \tag{2}$$

En posant $N = \max(N_1, N_2)$, alors d'après (1) et (2) :

$$n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| \underset{(1)}{\leqslant} \frac{|v_n - \ell'|}{m|\ell'|} \underset{(2)}{\leqslant} \frac{\varepsilon m|\ell'|}{m|\ell'|} = \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit $\lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$. □

• Si $\lim u_n = \ell \neq 0$ et $\lim v_n = 0^+$. Montrons que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$; le résultat découlera alors par limite d'un produit.

Soit $A > 0$ quelconque ; posons $\varepsilon = \frac{1}{A} > 0$. Puisque $\lim v_n = 0^+$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies 0 \leqslant v_n \leqslant \varepsilon$$

Or (v_n) ne s'annule pas à partir d'une certain rang :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$$

et donc en posant $N = \max(N_0, N_1)$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N &\implies 0 < v_n \leqslant \varepsilon \\ &\implies \frac{1}{v_n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} = A \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall A > 0,\ \exists N(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(A) \implies \frac{1}{v_n} \geqslant A$$

Lorsque $A \leqslant 0$, en particulier :

$$n \geqslant N(1) \implies \frac{1}{v_n} \geqslant 1 \geqslant A$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \frac{1}{v_n} \geqslant A$$

Autrement dit : $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$. ■

Remarque. Indéterminé "$\frac{\infty}{\infty}$" :

– Si $u_n = n^2$ et $v_n = n$, alors $\frac{u_n}{v_n} = n \longrightarrow +\infty$.

– Si $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

– Si $u_n = (2 + (-1)^n) \times n$ et $v_n = n$, alors $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$ et $\frac{u_n}{v_n} = (2 + (-1)^n)$ n'a pas de limite.

Exercice 6. Calculer la limite de :

$$u_n = \frac{n^3(n^2+1)}{n^2(\sin(n)-n^3)} \quad ; \quad v_n = \frac{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n^3}}$$

2.2. **Limites de référence.**

2.2.1. *Suites arithmétiques/géométriques.*
Nous avons deja établi :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & \textit{si } r > 0 \\ u_0 & \textit{si } r = 0 \\ -\infty & \textit{si } r < 0 \end{cases}$$

Concernant les suites géométriques, leur nature s'obtient à l'aide du résultat :

Propriété 12.
Soit $u_n = q^n$ une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q. Alors :

- *Si* $q > 1$: $\lim u_n = +\infty$
- *Si* $q = 1$: (u_n) *est constante*
- *Si* $-1 < q < 1$: $\lim u_n = 0$
- *Si* $q \leqslant -1$: (u_n) *n'a pas de limite*

Démonstration. Si $q = 1$ le résultat est évident. Montrons les autres cas.
– 1^{er} cas : si $q > 1$.
Alors $q = 1 + r$ avec $r > 0$. D'après la formule du binôme, si $n \geqslant 1$:

$$q^n = (1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k = 1 + nr + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} r^k}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + nr \longrightarrow +\infty$$

donc par comparaison (théorème 11), $\lim q^n = +\infty$.
– 2^{eme} cas : si $-1 < q < 1$.
Si $q = 0$ le résultat est évident, aussi supposons que $q \neq 0$. On a alors :

$$0 < |q| < 1 \implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies w_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \longrightarrow +\infty.$$

Or $|q|^n = \frac{1}{w_n}$ et donc par quotient des limites, $\lim |q|^n = 0$ et donc (propriété 3) $\lim q^n = 0$.
–3^{eme} cas : si $q \leqslant -1$.

Alors $q^2 \geqslant 1$ et donc la suite extraite de rangs pairs (q^{2n}) a pour limite 1 ou $+\infty$. Mais la suite extraite de rangs impairs q^{2n+1} est à termes tous strictement négatifs, et ne peut donc pas avoir même limite que q^{2n} (propriété 5). D'après le théorème 9, $u_n = q^n$ n'a donc aucune limite. ■

2.2.2. *Limite de suite et de fonctions.*

On admettra pour l'instant les résultats de cette partie ; ils seront démontrés indépendamment dans le chapitre "Limites de fonctions".

Propriété 13.
Soit f une fonction réelle admettant une limite en $+\infty$.

$$u_n = f(n) \implies \lim u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Exemple. Puissance réelle :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $n^\alpha = \exp(\alpha \ln(n))$. Des limites usuelles de exp et ln aux bornes de leur ensemble de définition :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

et de $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, on déduit la limite de $u_n = n^\alpha$ selon les valeur de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha > 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0^+ & si\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Le théorème suivant, appelé <u>théorème de composition des limites</u> est très utile :

Théorème 14.
Soient (u_n) une suite réelle ayant une limite L finie ou infinie et f une fonction réelle admettant une limite L' lorsque x tend vers L. Alors la suite $(f(u_n))$ admet pour limite L' ; autrement dit :

$$\left.\begin{array}{r} \lim u_n = L \\ \lim\limits_{x\to L} f(x) = L' \end{array}\right\} \implies \lim f(u_n) = L'$$

Exemples.

- Avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 \end{array}\right\} \implies \lim \left(n \times \sin \frac{1}{n}\right) = 1$$

- Avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{array}\right\} \implies \lim \left(n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

• Avec $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim \left(n \times \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right) = 1$$

Exercice 7. Déterminer les limites de :

$$u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}}{n} \qquad ; \qquad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.2.3. *Croissance comparée des suites factorielle, géométriques et puissances.*

On compare les suites :

– factorielle : $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

$$\lim n! = +\infty \quad \text{car } n! \geqslant n$$

– géométriques : q^n.

$$\lim q^n = +\infty \quad \text{si } q > 1$$

– puissances : n^α.

$$\lim n^\alpha = +\infty \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Informellement, les 3 suites tendent vers $+\infty$ (lorsque $q > 1$ et $\alpha > 0$), mais factorielle tend vers $+\infty$ plus vite que toute suite géométrique, elles-mêmes tendant vers $+\infty$ plus vite que toute suite puissance.

Propriété 15. Croissance comparée de $n!$, q^n et n^α.

• *Pour tout $q > 0$:*

$$\lim \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

• *Pour tout $q > 1$:*

$$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$$

Démonstration. Pour la première ; soit $q > 0$, formons :

$$\frac{n!}{q^n} = \frac{\overbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{q \times q \times \cdots \times q}_{n \text{ termes}}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{q}$$

Soit N un entier naturel fixé vérifiant $N > q$ (par exemple $N = \lfloor q \rfloor + 1$). Alors pour tout entier $n \geqslant N+1$:

$$\frac{n!}{q^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{q} = \prod_{k=1}^{N} \frac{k}{q} \times \prod_{k=N+1}^{n} \frac{k}{q} > \frac{N!}{q^N} \times \prod_{k=N+1}^{n} \frac{N}{q} = \underbrace{\frac{N!}{q^N}}_{\substack{\text{fixé} \\ >0}} \times \underbrace{\left(\frac{N}{q}\right)^{n-N}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque $\left(\dfrac{N}{q}\right)^{n-N}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{N}{q} > 1$.

Pour la seconde :

$$\frac{q^n}{n^\alpha} = \frac{e^{n\ln q}}{e^{\alpha \ln n}} = \exp\left(n\left(\ln q - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

Par croissance comparée des fonctions logarithme et puissance (cf. Chapitre "Fonctions usuelles") et avec le théorème de composition des limites :

$$\ln q - \alpha \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\longrightarrow 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln q > 0 \text{ car } q > 1$$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim(n\ln q) = +\infty$, donc par composition des limites :

$$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$$

■

Exercice 8. Déterminer les limites de :

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n} \qquad ; \qquad v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times n^{100} \qquad ; \qquad w_n = \frac{n!}{2^n \times n^{1000}}$$

3. Suites monotones

3.1. Définitions.

Définition 7.
- *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$$
- *Elle est de plus strictement croissante lorsque :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.

Définition 8.
- *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$$
- *Elle est de plus strictement décroissante lorsque :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

Exemples.
- Une suite arithmétique de raison r est :
$$\begin{cases} \text{strictement croissante} & \text{si } r > 0 \\ \text{strictement décroissante} & \text{si } r < 0 \\ \text{constante} & \text{si } r = 0 \end{cases}$$
- La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
$$\begin{cases} \text{strictement croissante} & \text{si } q > 1 \\ \text{strictement décroissante} & \text{si } 0 < q < 1 \\ \text{constante} & \text{si } q = 1 \\ \text{ni croissante ni décroissante} & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

Remarque. Pour étudier la monotonie d'une suite, c'est à dire si elle est croissante ou décroissante (etc.) on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si la suite est à terme > 0, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Exercice 9. Étudier la monotonie des suites :
$$u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad ; \qquad v_n = \frac{n!}{n^n}$$

Définition 9.
Une suite croissante ou décroissante est dite monotone. Une suite strictement croissante ou strictement décroissante est dite strictement monotone.

Exemple. La suite $(-1)^n$ n'est pas monotone.

3.2. Théorème de la limite monotone.

C'est le résultat le plus important pour établir l'existence de la limite d'une suite.

Définition 10.
- *Une suite réelle est majorée si le sous-ensemble* $\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *est majoré, autrement dit si :*
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$
- *Une suite réelle est minorée si le sous-ensemble* $\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *est minoré, autrement dit si :*
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

Théorème 16.
Toute suite croissante et majorée, converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Alors $A = \left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est majoré et donc admet une borne supérieure. Notons $\ell = \sup(A)$ et montrons que $\sup(A) = \lim u_n$.
Soit $\varepsilon > 0$; Puisque ℓ est le plus petit majorant de A, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Donc
$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \ell - \varepsilon \leqslant u_{N_0} \leqslant \ell$$
Mais puisque (u_n) est croissante :
$$n \geqslant N_0 \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_{N_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$$
Ainsi :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$$
Autrement dit $\lim u_n = \ell^-$. ■

Remarque. Et la convergence se fait par valeur inférieure.

Corollaire 17.
Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration. Soit (u_n) une suite décroissante et minorée ; alors la suite $(-u_n)$ est croissante et majorée, et donc converge vers ℓ. La suite (u_n) converge donc vers $-\ell$. ■

Propriété 18.
Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration.

Supposons d'abord que (u_n) est croissante et non majorée.

Soit $A \in \mathbb{R}$; A n'est pas un majorant de (u_n) et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant A$. Puisque (u_n) est croissante :

$$n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant A$$

c'est à dire $\lim u_n = +\infty$.

Supposons ensuite que (u_n) soit décroissante et non minorée, alors $(-u_n)$ est croissante et non majorée et donc diverge vers $+\infty$. Donc $\lim u_n = -\infty$. ■

Remarque. Ainsi pour une suite monotone, les possibilités peuvent être :

$$(u_n) \text{ monotone} \quad : \begin{cases} (u_n) \text{ croissante} \quad : \begin{cases} (u_n) \text{ majorée :} & (u_n) \text{ converge} \\ \text{ou} & \\ (u_n) \text{ non majorée :} & \lim u_n = +\infty \end{cases} \\ \text{ou} \\ (u_n) \text{ décroissante :} \begin{cases} (u_n) \text{ minorée :} & (u_n) \text{ converge} \\ \text{ou} & \\ (u_n) \text{ non minorée :} & \lim u_n = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n! \times n}$$

Montrer que (u_n) est convergente. (On ne demande pas de déterminer sa limite).

Méthode. Le théorème de la limite monotone donne l'existence d'une limite finie pour une suite croissante majorée (ou décroissante minorée). Comment déterminer ensuite cette limite ? Le plus souvent son calcul s'obtient par un passage à la limite dans une relation suivie par la suite, en général un relation de récurrence.

• Exemple : Algorithme de Babylone.

Le calcul approché de $\sqrt{2}$ peut se faire par l'algorithme de Babylone, qui consiste à calculer jusqu'à un rang suffisant, les termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Montrons que cette suite converge vers $\sqrt{2}$.

• Par une récurrence immédiate (u_n) est bien définie et à termes tous > 0 :
Soit $\mathscr{P}(n)$: "u_n est défini et > 0".
(I) $\mathscr{P}(0)$ est vrai.
(H) Si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$ est bien définie et > 0 car somme de termes définis et > 0. Donc $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$. C'est clair pour u_0 et :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geqslant 0$$

• La suite (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{2} - u_n)(u_n + \sqrt{2})}{2u_n} \leqslant 0$$

• La suite (u_n) est décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) ; elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite ; puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$, nécessairement $\ell \geqslant \sqrt{2}$.
• On détermine sa limite par passage à la limite dans la relation de récurrence.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \tag{$*$}$$

Puisque $\lim u_n = \ell$ on a $\lim u_{n+1} = \ell$ et par somme et quotient :

$$\lim \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$$

D'après $(*)$, par unicité de la limite :

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} \implies \ell^2 = \frac{\ell^2}{2} + 1 \implies \ell^2 = 2 \implies \ell = \pm\sqrt{2}$$

Or puisque $\ell \geqslant \sqrt{2}$:

$$\lim u_n = \sqrt{2}$$

• Code en Python.

```python
def racine2(N):
   u = 2
   v = u/2 + 1/u
   while abs(u-v) >= 10**-N :
      u, v = v, v/2 + 1/v
   return int(v*10**N) / 10**N
```

L'algorithme convergeant très vite (admis), on peut supposer que lorsque deux termes successifs ont N décimales identiques, toutes ces décimales sont correctes.
Ainsi `racine2(N)` renvoie une approximation de $\sqrt{2}$ avec N décimales exactes. Exemple :

```
>>> 2**.5
1.4142135623730951

>>> racine2(3)
1.414

>>> racine2(6)
1.414213

>>> racine2(15)
1.414213562373095
```

3.3. **Suites adjacentes.**

Définition 11.
Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si :
– l'une est croissante, l'autre décroissante, et
– leur différence tend vers 0 : $\lim(a_n - b_n) = 0$.

Propriété 19.
Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.

En posant $u_n = b_n - a_n$:
$$u_{n+1} - u_n = (b_{n+1} - a_{n+1}) - (b_n - a_n) = \underbrace{(b_{n+1} - b_n)}_{\leqslant 0} + \underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$
Donc (u_n) est décroissante, et par hypothèse converge vers 0. En particulier :
$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow b_n - a_n \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow b_n \geqslant a_n \end{aligned}$$
Mais puisque (a_n) est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant a_0$; donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geqslant a_n \geqslant a_0$$
et donc (b_n) est minorée par a_0. D'autre part puisque (b_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, b_0 \geqslant b_n$; donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_0 \geqslant b_n \geqslant a_n$$
Donc (a_n) est majorée par b_0.

En résumé :

(a_n) est croissante et majorée, et donc convergente vers ℓ.

(b_n) est décroissante et minorée et donc convergente vers ℓ'. Or :
$$\lim(a_n - b_n) = 0 = \ell - \ell' \implies \ell = \ell'.$$
∎

Exemple. On pose pour $n \geqslant 1$:
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad ; \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On a (v_n) décroissante (voir exercice précédent) et :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$
donc (u_n) est croissante. Or :
$$v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \longrightarrow 0$$
Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles sont donc convergentes et ont même limite (qui s'avère être le nombre e ; mais pour l'instant on ne sait pas le démontrer.).

Exercice 11. Soient les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = 1 \quad ; \quad b_0 = 5 \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$.
b) Prouver que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
c) En considérant la suite $(a_n + b_n)$, déterminer les limites de (a_n) et (b_n).

4. Suites équivalentes

4.1. Definition et motivation.

Définition 12. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles dont le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.*
On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), que l'on note :

$$u_n \sim v_n$$

lorsque : $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemples.

• Si $u_n = n^2 + n + 1$ et $v_n = n^2$ alors $u_n \sim v_n$ car :

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$$

• Si $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$ et $v_n = n$ alors $u_n \sim v_n$ car :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$$

• Si $u_n = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $a_d \neq 0$ alors $u_n \sim a_d n^d$, car :

$$\frac{u_n}{a_d n^d} = 1 + \underbrace{\frac{a_{d-1}}{a_d} \times \frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_d} \times \frac{1}{n^{1-d}} + \frac{a_0}{a_d} \times \frac{1}{n^d}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 1$$

Une suite polynômiale non nulle

$$u_n = \sum_{k=0}^{d} a_k n^k \qquad \textit{avec } a_d \neq 0$$

est équivalente à son monôme de plus haut degré $a_d n^d$.

Le résultat fondamental des suites équivalentes est :

Propriété 20.
Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$:

$$\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ \textit{et} \\ \lim v_n = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = L$$

Démonstration. Par produit des limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \\ \lim v_n = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} \times v_n = L = \lim u_n$$

■

C'est la motivation principale des équivalents : le calcul de limite.

Mais il y a une autre motivation ; pour des suites tendant vers $+\infty$ ou vers 0, être équivalent signifie non seulement avoir même limite mais aussi avoir même rapidité de convergence.

Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} n \sim n+1 & \text{tandis que} & n \not\sim n^2 \\ \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n+1} & \text{tandis que} & \dfrac{1}{n} \not\sim \dfrac{1}{n^2} \\ \sqrt{n^2+n+1} \sim n & \text{et} & \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Propriété 21.
Si (u_n) converge vers un réel $\ell \neq 0$ alors (u_n) est équivalente à la suite constante égale à ℓ :

$$u_n \sim \ell$$

Démonstration. Par quotient des limites, sous ces hypothèses $\lim \dfrac{u_n}{\ell} = 1$. ■

4.2. **Propriétés.**

Propriété 22.
Soient $(u_n), (v_n), (w_n), \ldots$ des suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- *Réflexivité :*

$$u_n \sim u_n$$

- *Symétrie :*

$$u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n$$

- *Transitivité :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ \textit{et} \\ v_n \sim w_n \end{array}\right\} \implies u_n \sim w_n$$

- *Multiplication par $\lambda \neq 0$:*

$$\forall \lambda \neq 0,\ u_n \sim v_n \implies (\lambda . u_n) \sim (\lambda . v_n)$$

- *Inverse :*

$$u_n \sim v_n \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \sim \left(\frac{1}{v_n}\right)$$

- *Puissance :*

$$u_n \sim v_n \implies \forall p \in \mathbb{Z},\ u_n^p \sim v_n^p$$

Si de plus (u_n) et (v_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang :

$$u_n \sim v_n \implies \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

- *Valeur absolue :*

$$u_n \sim v_n \implies |u_n| \sim |v_n|$$

- *Produit :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$$

- *Quotient :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \implies \left(\frac{u_n}{u'_n}\right) \sim \left(\frac{v_n}{v'_n}\right)$$

Remarque. Attention :

- On ne peut pas additionner des équivalents :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \text{n'entraîne pas en général que } (u_n + u'_n) \sim (v_n + v'_n)$$

Exemple :

$$u_n = \left(n + \sqrt{n}\right) \sim n \qquad \text{car } \frac{u_n}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1$$
$$v_n = (1-n) \sim (1-n) \qquad \text{par réflexivité}$$
$$u_n + v_n = (1+\sqrt{n}) \qquad \text{n'est pas équivalent à } (n + (1-n)) = 1$$

• On ne peut pas composer des équivalents par une fonction :

Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ d'une fonction f,

$$u_n \sim v_n \text{ n'entraîne pas en général que } f(u_n) \sim f(v_n)$$

Exemple :

$$(n+1) \sim n \quad \text{car } \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$$
$$\exp(n+1) \nsim \exp(n) \quad \text{car } \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \longrightarrow e \neq 1$$

Démonstration. Ces propriétés découlent de celles des limites :

– Refléxivité : $\frac{u_n}{u_n} = 1 \longrightarrow 1 \implies u_n \sim u_n$.

– Symétrie : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \lim \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{1} = 1$ (par quotient des limites) $\implies \lim \frac{v_n}{u_n} = 1 \implies v_n \sim u_n$.

– Transitivité : $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{v_n}{w_n} = 1 \implies \lim \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = 1$ (par produit des limites) $\implies \lim \frac{u_n}{w_n} = 1 \implies u_n \sim w_n$.

– Multiplication par $\lambda \neq 0$: $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \lim \frac{\lambda u_n}{\lambda v_n} = 1 \implies \lambda u_n \sim \lambda v_n$.

– Inverse : $u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n$ (par symétrie) $\implies \lim \frac{v_n}{u_n} = 1 \implies \lim \frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{v_n}} = 1 \implies \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.

– Puissance : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \forall p \in \mathbb{Z},\ \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^p = 1$ (car $\lim\limits_{x \to 1} x^p = 1$) $\implies \lim \left(\frac{u_n^p}{v_n^p}\right) = 1 \implies u_n^p \sim v_n^p$.

– Puissance réelle : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = 1$ (car $\lim\limits_{x \to 1} \exp(\alpha \ln(x)) = 1$) $\implies \lim \left(\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha}\right) = 1 \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

– Valeur absolue : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \lim \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = 1$ (car $\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$) $\implies \lim \frac{|u_n|}{|v_n|} = 1 \implies |u_n| \sim |v_n|$.

– Produit : $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim \frac{u'_n}{v'_n} = 1 \implies \lim \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 1$ (par produit des limites) $\implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

– Quotient : $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \implies \frac{1}{u'_n} \sim \frac{1}{v'_n}$ (par inverse d'équivalents) $\implies \frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$ (par produit d'équivalents). ∎

Exemples.

• Quotient de deux polynômes :

$$u_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots b_1 n + b_0} \qquad \textit{avec } a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$$
$$\Longrightarrow u_n \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$$

par quotient d'équivalents.

• Pour calculer l'équivalent d'une somme on ne peut pas faire la somme des équivalents de chaque terme. Il suffit de factoriser le terme "dominant" (intuitivement celui qui impose sa limite). Exemples :

$$u_n = 3n^2 - 2n + \sqrt{n} - \frac{2}{n} = 3n^2 \times \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3n^3}\right)}_{\longrightarrow 1} \sim 3n^2$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2\cos(n)}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \underbrace{\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{3\cos(n)}{n\sqrt{n}}\right)}_{\longrightarrow 1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 12. Calculer un équivalent simple de :

$$u_n = n^2\sqrt{n} - n^3\sqrt[3]{n} + \frac{1}{n^2}$$

4.3. **Équivalents usuels.**

Les équivalents usuels suivants sont à très bien connaître ; les utiliser simplifie grandement la levée de certaines indéterminées.

Propriété 23.
Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \tan(u_n) \sim u_n \qquad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$$
$$\ln(1+u_n) \sim u_n \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n$$
$$\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} \qquad \forall \alpha > 0,\quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

Démonstration. Pour 3 des 5 premières il suffit d'appliquer les limites usuelles :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

avec le théorème de composition des limites : puisque $\lim u_n = 0$:

$$\lim \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1 \quad ; \quad \lim \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1 \quad ; \quad \lim \frac{e^{u_n}-1}{u_n} = 1$$

De $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$ on déduit par composition des limites $\lim \cos(u_n) = 1$ et donc $\cos(u_n) \sim 1$ et par quotient d'équivalents :

$$\tan(u_n) = \frac{\sin(u_n)}{\cos(u_n)} \sim \frac{u_n}{1} \sim u_n$$

Puisque :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \implies 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$$

$$\implies 1 - \cos(u_n) = 2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim 2\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 \sim \frac{u_n^2}{2}$$

Pour la dernière : $(1+u_n)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+u_n)} - 1$. Puisque $\lim u_n = \lim \ln(1+u_n) = 0$ par composition des limites dans $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

$$\frac{e^{\alpha \ln(1+u_n)} - 1}{\alpha u_n} = \underbrace{\frac{e^{\alpha \ln(1+u_n)} - 1}{\alpha \ln(1+u_n)}}_{\longrightarrow 1} \times \underbrace{\frac{\alpha \ln(1+u_n)}{\alpha u_n}}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow 1$$

d'où :

$$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

L'avant dernière en est un cas particulier lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$. ■

Exemple. Calculer la limite de :

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On a une indéterminée "$\frac{0}{0}$".

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{2n} \longrightarrow 0$$

Exercice 13. Déterminer nature et limite éventuelle à l'aide d'un équivalent de :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(\sqrt{n^2-1} - n\right) \quad ; \quad v_n = \frac{\sqrt{cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\tan \frac{(-1)^n}{n^2}}$$