Chapitre 16
Limites de fonctions

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

1. Définitions

1.1. **Notations.** Dans tout ce chapitre :

- D désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application réelle,
- I désigne un intervalle ouvert non-vide inclus dans D.
- x_0 désigne un élément de $I \subset D$ ou une borne réelle de I.
- a désigne un élément de $I \subset D$ ou une borne finie ou infinie de I.

1.2. **Limite finie d'une application réelle en $\pm\infty$.**

1.2.1. *Limite finie en $+\infty$.*

Définition 1.
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application avec D contenant un voisinage de $+\infty$ (i.e. $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tel que $]a;+\infty[\subset D$).
On dit que <u>f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$</u> si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon}\ .$$

Dans ce cas on note : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$ *ou* $\boxed{\lim_{+\infty} f = \ell}$ *ou* $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$ *ou* $\boxed{f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell}$.

Remarques.
• Informellement : "on peut faire approcher $f(x)$ de ℓ autant qu'on veut en prenant x suffisamment proche de $+\infty$."
• La définition est la transcription pour une application définie au voisinage de $+\infty$ de la définition de la limite finie d'une suite.

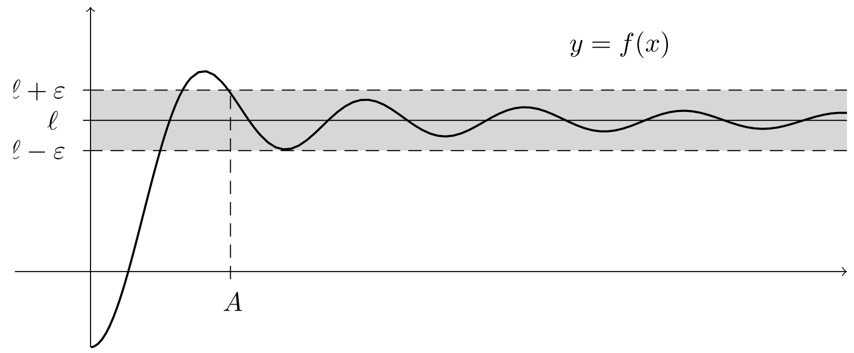


FIGURE 1. Illustration de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$; quelque soit l'écart $\varepsilon > 0$ il existe un réel A tel que dès que $x \geqslant A$, $f(x)$ est à distance au plus ε de ℓ.

Exemple. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ quelconque :

$$\left|0 - \frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

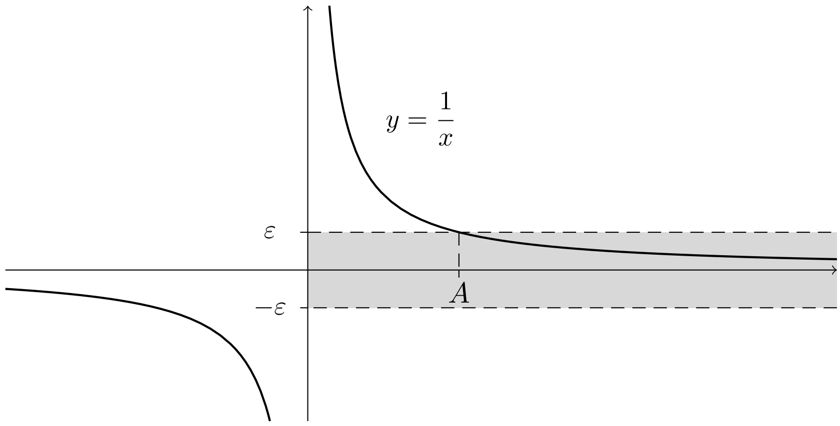
En se plaçant sur $\mathbb{R}_+^*$, voisinage de $+\infty$:

$$\iff 0 < \frac{1}{x} \leqslant \varepsilon \iff x \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$$

Ainsi en posant $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$, quelque soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x \geqslant A \implies \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, x \geqslant A \implies |f(x) - 0| \leqslant \varepsilon$.



1.2.2. *Limite finie en $-\infty$.*

Définition 2.
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application avec D contenant un voisinage de $-\infty$ (i.e. $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; a[\subset D$).
On dit que f a pour limite le réel ℓ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon}\ .$$

Dans ce cas on note : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell}$ *ou* $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = \ell}$ *ou* $\boxed{f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell}$ *ou* $\boxed{f \underset{-\infty}{\longrightarrow} \ell}$.

Remarques.
• Informellement : "on peut faire approcher $f(x)$ de ℓ autant qu'on veut en prenant x suffisamment proche de $-\infty$."
• La définition est analogue à celle d'une limite finie en $+\infty$, mais cette fois-ci au voisinage de $-\infty$.

Exemple. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{-\infty} f = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ quelconque :

$$\left|0 - \frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

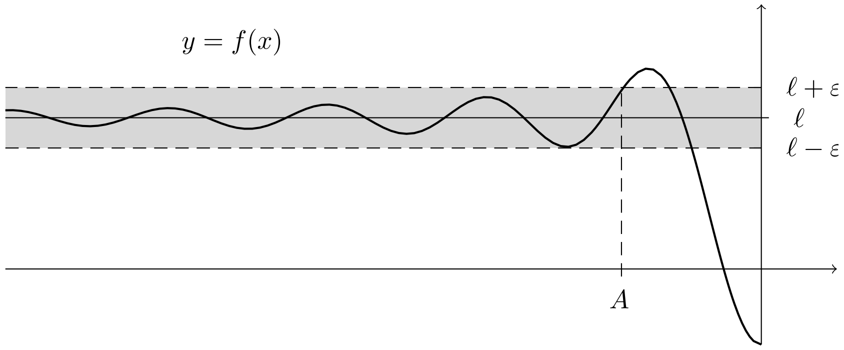


Figure 2. Illustration de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$; quelque soit l'écart $\varepsilon > 0$ il existe un réel A tel que dès que $x \leqslant A$, $f(x)$ est à distance au plus ε de ℓ.

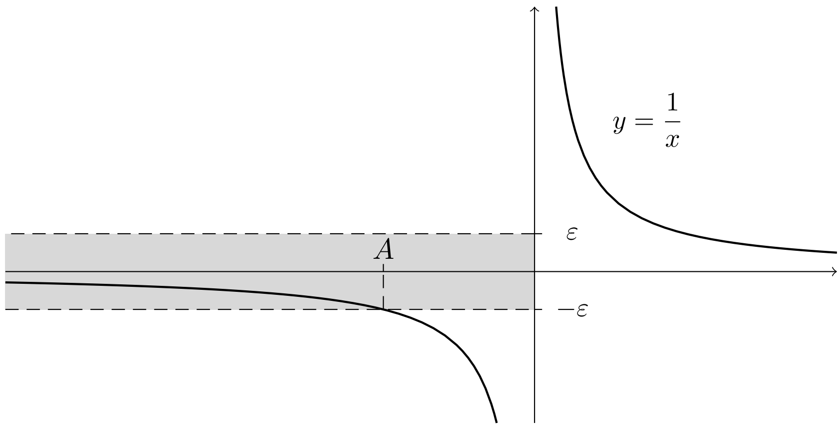
En se plaçant sur $\mathbb{R}_-^*$, voisinage de $-\infty$:

$$\iff 0 < \frac{1}{-x} \leqslant \varepsilon \iff -x \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \iff x \leqslant -\frac{1}{\varepsilon}$$

Ainsi en posant $A = -\dfrac{1}{\varepsilon}$, quelque soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x \leqslant A \implies \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, x \leqslant A \implies |f(x) - 0| \leqslant \varepsilon$.



1.2.3. *Limite finie par valeur supérieure/inférieure.*

Définition 3.
• *Si f a pour limite ℓ en $+\infty$, et si de plus il existe un réel A tel que $\forall\, x \geqslant A$, $f(x) \geqslant \ell$ alors ont dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ <u>par valeur supérieure</u>, et on écrit :*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+}.$$

• *Si f a pour limite ℓ en $+\infty$, et si de plus il existe un réel A tel que $\forall\, x \geqslant A$, $f(x) \leqslant \ell$ alors ont dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ par <u>valeur inférieure</u>, et on écrit :*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-}.$$

• *Si f a pour limite ℓ en $-\infty$, et si de plus il existe un réel A tel que $\forall\, x \leqslant A$, $f(x) \geqslant \ell$ alors ont dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ <u>par valeur supérieure</u>, et on écrit :*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^+}.$$

• *Si f a pour limite ℓ en $-\infty$, et si de plus il existe un réel A tel que $\forall\, x \leqslant A$, $f(x) \leqslant \ell$ alors ont dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ par <u>valeur inférieure</u>, et on écrit :*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^-}.$$

Remarque.
En bref :
• f tend vers ℓ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) <u>par valeur supérieure</u>, si dans un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), $f(x)$ reste supérieur ou égal à ℓ,
• f tend vers ℓ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) <u>par valeur inférieure</u>, si dans un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), $f(x)$ reste inférieur ou égal à ℓ.

Exemple. Des exemples plus haut découlent :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

en effet, $x > 0 \implies \dfrac{1}{x} > 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

en effet, $x < 0 \implies \dfrac{1}{x} < 0$.

1.2.4. *Asymptôte horizontale.*

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Définition 4.
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour <u>asymptôte horizontale</u> la droite d'équation $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

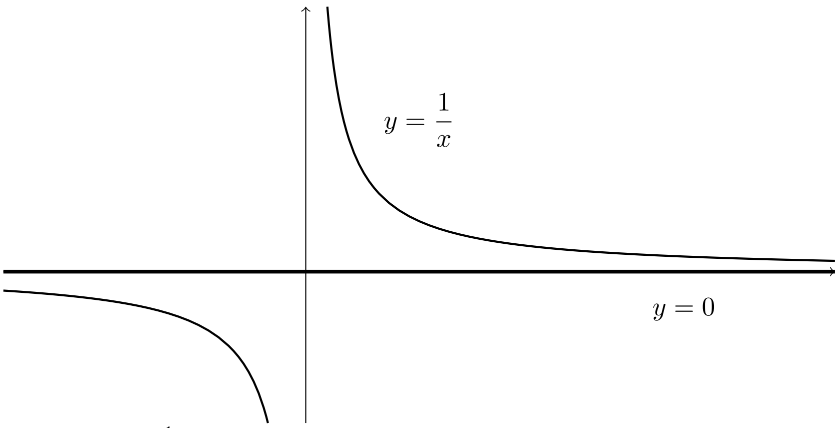
• Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$ alors $\mathscr{C}_f$ a pour asymptôte $y = \ell$ et reste <u>au dessus de son asymptôte</u> au voisinage de $+\infty$.

• Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-$ alors $\mathscr{C}_f$ a pour asymptôte $y = \ell$ et reste <u>au dessous de son asymptôte</u> au voisinage de $+\infty$.

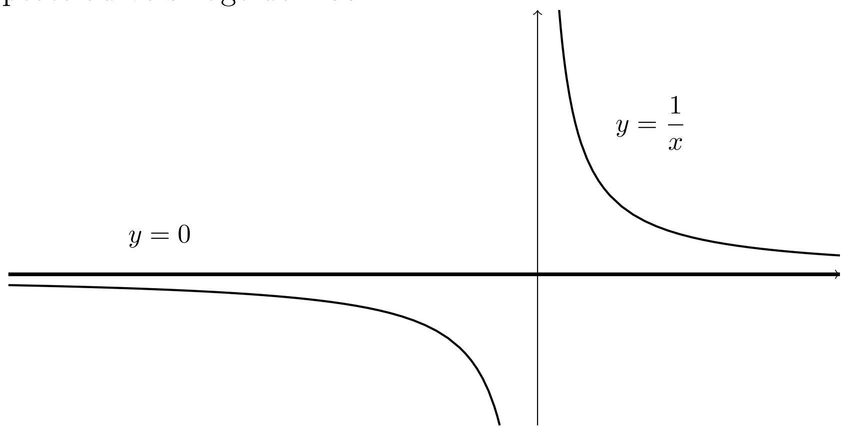
Et de même au voisinage de $-\infty$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^+$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^-$.

Exemple. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$:

• La courbe de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ a pour asymptôte l'axe des abscisse $y = 0$ et reste au-dessus de son asymptôte au voisinage de $+\infty$.



• La courbe de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ a pour asymptôte l'axe des abscisse $y = 0$ et reste au-dessous de son asymptôte au voisinage de $-\infty$.



1.3. Limite d'une application réelle en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.3.1. *Définition.*

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 5. *On dit que f a pour limite le réel ℓ en x_0, si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell}$ *ou* $\boxed{\lim\limits_{x_0} f = \ell}$ *ou* $\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell}$ *ou* $\boxed{f \underset{x_0}{\longrightarrow} \ell}$.

Remarque. Informellement : "on peut faire approcher $f(x)$ de ℓ autant qu'on veut en prenant x suffisamment proche de x_0."

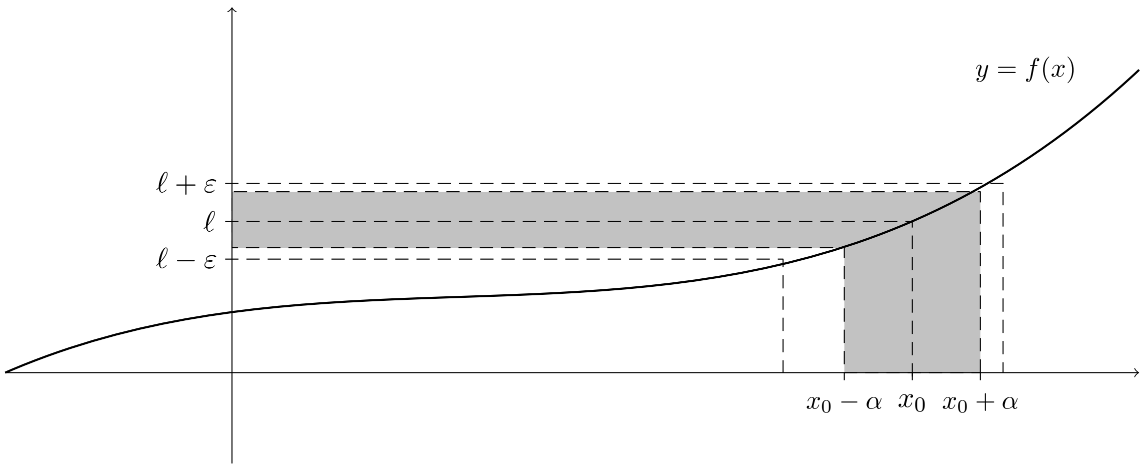


Figure 3. Illustration de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$; pour chaque écart $\varepsilon > 0$, il existe un écart $\alpha > 0$ tel que si x est à distance de x_0 inférieure à α alors $f(x)$ et à distance de $f(x_0)$ inférieure à ε.

Exemple. Soit : $f : x \longmapsto 3x + 2$. Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$. En effet : soit $\varepsilon > 0$ quelconque, alors :

$$|f(x) - 5| \leqslant \varepsilon \iff |3x - 3| \leqslant \varepsilon \iff 3|x - 1| \leqslant \varepsilon \iff |x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi il existe $\alpha_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ tel que :

$$|x - 1| \leqslant \alpha_\varepsilon \implies |f(x) - 5| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques.

• D'après la définition :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon && (\text{i.e. } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell) \\
\iff &\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |(f(x) - \ell) - 0| \leqslant \varepsilon && (\text{i.e. } \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0) \\
\iff &\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies ||f(x) - \ell| - 0| \leqslant \varepsilon && (\text{i.e. } \lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0)
\end{aligned}$$

• En posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell.$$

En effet :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (\text{i.e. } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell)$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |h| \leqslant \alpha \implies |f(x_0+h) - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (\text{i.e. } \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell)$$

• La valeur de f en x_0 doit être égale à sa limite lorsqu'elles sont définies.

Si f est définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ alors $f(x_0) = \ell$.

En effet : Soit f définie en x_0 tel que $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Or pour $x = x_0$, $|x - x_0| = 0 \leqslant \alpha$ quelque soit $\alpha > 0$.
Ainsi en appliquant la définition pour $x = x_0$, pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x_0) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Si l'on avait $f(x_0) \neq \ell$ alors notons $|f(x_0) - \ell| = a > 0$. Pour $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$ on aurait donc :

$$a = |f(x_0) - \ell| \leqslant \frac{a}{2} \underset{a>0}{\implies} 1 \leqslant \frac{1}{2}$$

C'est absurde. Donc nécessairement $f(x_0) = \ell$.

1.3.2. *Limites à droite ou à gauche en x_0.*

Définition 6. *(Limite à droite en x_0)*
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$; on suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]x_0, x_0 + h[\subset D$.
On dit que f a pour limite à droite en x_0 le réel ℓ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D,\ 0 < x - x_0 \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

On note alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell}$ *ou* $\boxed{\lim\limits_{x_0^+} f = \ell}$ *ou* $\boxed{f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell}$ *ou* $\boxed{f \underset{x_0^+}{\longrightarrow} \ell}$.

Remarques.

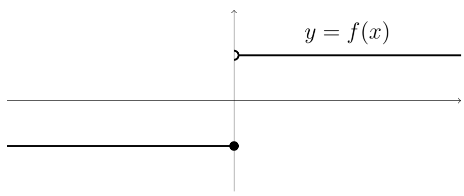
• "Quelque soit l'écart $\varepsilon > 0$, si x est suffisament proche de x_0 et $x > x_0$, alors $f(x)$ est à distance au plus ε de ℓ."

• La valeur de f en x_0 n'est pas prise en compte dans la définition de la limite de f à droite en x_0.

• f a pour limite à droite ℓ en x_0 si et seulement si la restriction de f à $D \cap]x_0, +\infty[$ a pour limite ℓ en x_0.

Exemple. Soit :

$$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



- Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$; f a pour limite à droite 1 en 0.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x > 0$, $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 \leqslant \varepsilon$.

- Par contre f n'a pas 1 pour limite en 0.

Remarque. La valeur de f en x_0 n'est pas prise en compte dans la définition de la limite de f à droite en x_0. Elle l'est dans la définition de $lim_{x_0} f$.

Définition 7. *(Limite à gauche en x_0)*
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$; supposons qu'il existe $h > 0$ tel que $]x_0 - h, x_0[\subset D$. On dit que f a pour limite à gauche le réel ℓ en x_0 si :

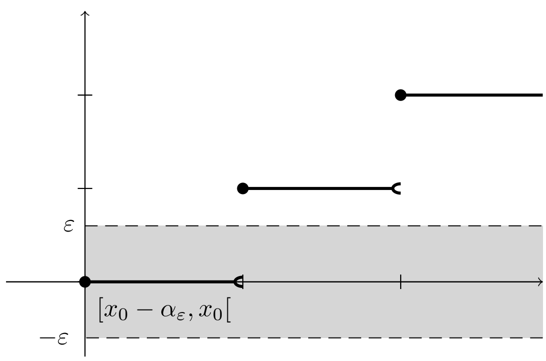
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D,\ -\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

On note alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell}$ *ou* $\boxed{\lim\limits_{x_0^-} f = \ell}$ *ou* $\boxed{f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell}$ *ou* $\boxed{f \underset{x_0^-}{\longrightarrow} \ell}$.

Remarque.
f a pour limite à gauche ℓ en x_0 si et seulement si la restriction de f à $D \cap]-\infty, x_0[$ a pour limite ℓ en x_0.

Exemple.
La fonction partie entière a pour limite 0 à gauche en 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$; en prenant $\alpha_\varepsilon = 1$ alors :

$$-\alpha_\varepsilon \leqslant x-1 < 0 \implies -1 \leqslant x-1 < 0 \implies 0 \leqslant x < 1 \implies \lfloor x \rfloor = 0 \implies |\lfloor x \rfloor - 0| = 0 \leqslant \varepsilon.$$



1.3.3. *Propriétés.*

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Propriété 1. *Si x_0 appartient à l'intervalle $I \subset D$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \implies \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \\ \textit{et} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

Démonstration. La propriété découle de $|x - x_0| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x - x_0 \leqslant \varepsilon$.
Supposons $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$; soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

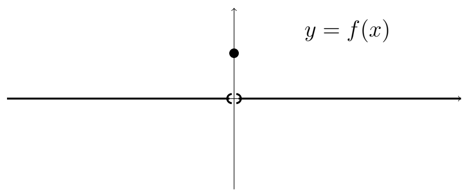
En particulier $\forall x \in D$, $0 < x - x_0 \leqslant \alpha \implies |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Et $\forall x \in D$, $-\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \implies |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$. ∎

Remarque. Cette propriété peut s'utiliser pour montrer qu'un fonction n'a pas de limite en x_0 dans le cas où elle admet des limites à droite et à gauche en x_0 différentes : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
Pour l'appliquer il faudra d'abord démontrer l'unicité de la limite (propriété 3).

Remarque. La réciproque est fausse ; par exemple soit :

$$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$; par contre f n'a pas pour limite 0 en 0 ; en effet, $f(0) = 1 \neq 0$.

La raison en est : pour que les limites à droite ou à gauche en x_0 soient égales à ℓ, la valeur de $f(x_0)$ n'a pas à être égale à ℓ, tandis qu'elle doit l'être pour que la limite en x_0 soit ℓ.
En rajoutant l'hypothèse $f(x_0) = \ell$, la réciproque devient vraie :

Propriété 2. *Sous les mêmes hypothèses :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Démonstration. On prouve deux implications :
$\boxed{\Rightarrow}$ Découle immédiatement de la propriété précédente avec $\ell = f(x_0)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$;

$$\lim_{x \to x0^+} f(x) = f(x_0) \implies \exists \alpha_1 > 0, 0 < x - x_0 \leqslant \alpha_1 \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$
$$\lim_{x \to x0^-} f(x) = f(x_0) \implies \exists \alpha_2 > 0, -\alpha_2 \leqslant x - x_0 < 0 \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$; alors pour tout $x \in D$:

$$\left.\begin{array}{c} 0 < x - x_0 \leqslant \alpha \\ \text{ou} \\ -\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{c} 0 < x - x_0 \leqslant \alpha_1 \\ \text{ou} \\ -\alpha_2 \leqslant x - x_0 < 0 \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$
$$\text{et } x = x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| = 0 \leqslant \varepsilon$$

On en déduit que pour tout $x \in D, -\alpha \leqslant x - x_0 \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Or $-\alpha \leqslant x - x_0 \leqslant \alpha \iff |x - x_0| \leqslant \alpha$. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ∎

Remarque. Le même argument montre que :

Si f n'est pas définie en x_0, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

Par exemple, pour montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ on montre séparément que $\frac{\sin x}{x}$ (qui n'est pas défini en 0) a des limites à droite et à gauche en 0 égales à 1.

Exercice 1. Montrer que la fonction partie entière a une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}$.
En quels point admet-elle une limite ?

Résolution.

1.4. **Limites infinies.**

On rappelle que $f : D \subset \mathbb{R}$ est une application réelle, où D contient un intervalle ouvert non-vide, et a est soit un élément de I soit une borne finie ou infinie de I ; $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1.4.1. *Définition.*

Définition 8. *(Limite infinie)*

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque :

- *Si $a = x_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant E}$$

- *Si $a = +\infty$:*

$$\boxed{\forall E > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geqslant A \implies f(x) \geqslant E}$$

- *Si $a = -\infty$:*

$$\boxed{\forall E > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leqslant A \implies f(x) \geqslant E}$$

et l'on note :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty} \quad ou \quad \boxed{\lim_{a} f = +\infty} \quad etc.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a lorsque :

- *Si $a = x_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant -E}$$

- *Si $a = +\infty$:*

$$\boxed{\forall E > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geqslant A \implies f(x) \leqslant -E}$$

- *Si $a = -\infty$:*

$$\boxed{\forall E > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leqslant A \implies f(x) \leqslant -E}$$

et l'on note :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty} \quad ou \quad \boxed{\lim_{a} f = -\infty} \quad etc.$$

Remarque. Lorsque $a = x_0 \in \mathbb{R}$, on définit de manière analogue au cas d'une limite finie, que f ait une limite infinie à droite ou à gauche en x_0 :

On dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en x_0 si :

$$\boxed{\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, 0 < x - x_0 \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant E}$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ à droite en x_0 si :

$$\boxed{\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, 0 < x - x_0 \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant -E}$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ à gauche en x_0 si :

$$\boxed{\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, -\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \implies f(x) \geqslant E}$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ <u>à gauche</u> en x_0 si :

$$\boxed{\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, -\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \implies f(x) \leqslant -E}$$

Par un raisonnement analogue à celui de la preuve de la propriété 2, on a le résultat :

Notons $\underline{L = \pm\infty}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff f \text{ n'est } \underline{\text{pas définie en } x_0}, \text{ et } \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \end{cases}$$

Exemple. Soit :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$; en effet, soit $E > 0$ quelconque ; si $x > 0$:

$$\frac{1}{x} \geqslant E > 0 \iff 0 < x \leqslant \frac{1}{E}$$

Ainsi en posant $\alpha_E = \dfrac{1}{E} > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 < x \leqslant \alpha_E \implies f(x) \geqslant E$.
D'où la conclusion.

D'autre part $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty}$; en effet, soit $E > 0$ quelconque ; si $x < 0$:

$$\frac{1}{x} \leqslant -E < 0 \iff 0 > x \geqslant -\frac{1}{E}$$

Ainsi en posant $\alpha_E = \dfrac{1}{E} > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, -\alpha_E \leqslant x < 0 \implies f(x) \leqslant -E$.

1.4.2. *Interprétation graphique : asymptôte verticale.*

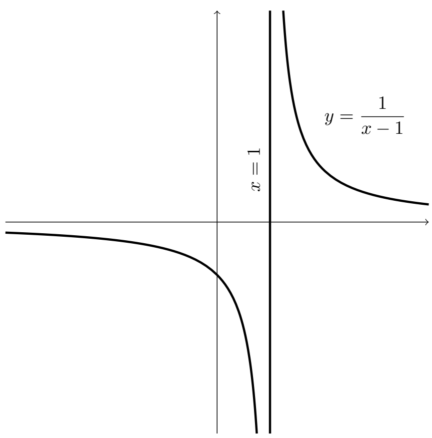
Définition 9. *La courbe représentative de $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour <u>asymptôte verticale</u> la droite $x = x_0$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}$) si la limite de f en x_0, à droite ou à gauche, est infinie.*

Exemple.
La courbe de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ admet pour asymptôte verticale la droite $x = 1$.
En effet (par exemple) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$: soit $E > 0$ et $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} \geqslant E > 0 \iff x - 1 \leqslant \frac{1}{E}$$

donc en posant $\alpha_E = \dfrac{1}{E} > 0$:

$$0 < x - 1 \leqslant \alpha_E \implies f(x) \geqslant E$$



1.4.3. *Asymptôte oblique.*

Définition 10. *La courbe représentative de $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour* <u>*asymptôte oblique*</u> *la droite d'équation $y = ax + b$ en $\pm\infty$ si :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0.$$

Exemple.

La courbe de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ admet pour asymptôte oblique la droite $y = x+1$ en $+\infty$.

En effet :

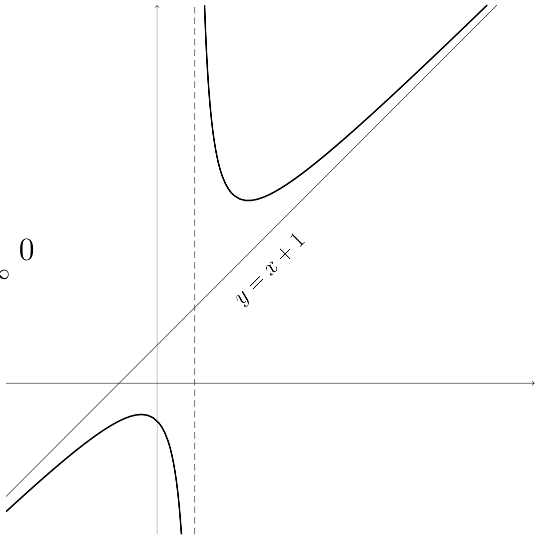
$$f(x)-(x+1) = \frac{x^2+1-(x^2-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque, soit $\varepsilon > 0$:

Soit $x > 1$: $0 < \dfrac{2}{x-1} \leqslant \varepsilon \iff x \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon} + 1.$

En posant $A_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} + 1$:

$$x \geqslant A_\varepsilon \implies \left|\frac{2}{x-1} - 0\right| \leqslant \varepsilon$$



Exercice 2. Montrer que la courbe de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ admet pour asymptôte oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2x+2$.

Résolution.

1.5. **Unicité de la limite.**

Propriété 3. *(Unicité de la limite)*
Si f admet une limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, cette limite est unique.

Démonstration. Par l'absurde : supposons que f admette deux limites différentes L_1 et L_2 en a.

Il y a 27 cas à considérer, selon que a, L_1 et L_2 soient réels, $+\infty$ ou $-\infty$... On ne montre qu'un cas, le plus délicat, tous les autres cas se traitent de manière analogue. On suppose que a, L_1 et L_2 sont tous trois réels.

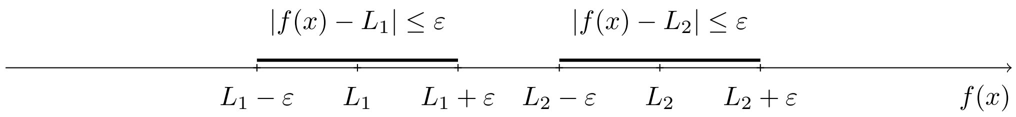
Soit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$.

En posant $\varepsilon = \dfrac{|L_2 - L_1|}{3} > 0$. Alors :

$$\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \alpha_1 \implies |f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon, \text{ et}$$
$$\exists \alpha_2 > 0, \forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \alpha_2 \implies |f(x) - L_2| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Ainsi :

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leqslant \alpha \implies \begin{cases} |x-a| \leqslant \alpha_1 \\ \text{et} \\ |x-a| \leqslant \alpha_2 \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x)-L_1| \leqslant \varepsilon \\ \text{et} \\ |f(x)-L_2| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$



En appliquant l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in D$, si x est à distance de a au plus α :

$$|L_2 - L_1| = |L_2 - f(x) + f(x) - L_1| \underset{I.T.}{\leqslant} |f(x) - L_2| + |f(x) - L_1| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L_2 - L_1|$$

Et donc puisque $|L_2 - L_1| > 0$: $1 \leqslant \frac{2}{3}$. C'est absurde. Donc f ne peut pas admettre les deux limites réelles $L_1 \neq L_2$. ■

2. Opérations et limites

On établit les résultats usuels sur les limites d'une somme $f+g$, d'un produit $f\times g$, et d'un quotient $\frac{f}{g}$ de deux applications f et g, en fonction des limites de f et g.

Dans toute cette partie, f et g désignent deux application réelles de D dans $\mathbb{R}$, I un intervalle ouvert non vide avec $I\subset D$, et a désigne une borne finie ou infinie de I ; ℓ et ℓ' désignent deux réels.

Dans un tableau, IND désigne un cas indéterminé ; on ne peut rien conclure dans ce cas sur la limite, ni son existence, ni sa valeur.

2.1. Somme.

Propriété 4.
Si f et g admettent une limite en a alors la limite de leur somme $f+g$ en a s'obtient à l'aide du tableau suivant :

$\lim\limits_a f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_a f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND

Démonstration. En guise d'exemple on établit le premier cas et le deuxième cas avec $a=x_0\in\mathbb{R}$; les autres cas se traitent de manière analogue.

• À prouver :

$$\lim_{x_0} f=\ell \text{ et } \lim_{x_0} g=\ell' \implies \lim_{x_0}(f+g)=\ell+\ell'$$

Soit $\varepsilon>0$; appliquons la définition avec $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$:

$$\exists\alpha_1>0,\forall x\in D,|x-x_0|\leqslant\alpha_1 \implies |f(x)-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists\alpha_2>0,\forall x\in D,|x-x_0|\leqslant\alpha_2 \implies |g(x)-\ell'|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$; alors

$$\forall x\in D,|x-x_0|\leqslant\alpha \implies \begin{cases}|x-x_0|\leqslant\alpha_1\\|x-x_0|\leqslant\alpha_2\end{cases} \implies \begin{cases}|f(x)-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\\|g(x)-\ell'|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire : $\forall x\in D$,

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies |(f+g)(x)-(\ell+\ell')| \underset{I.T.}{\leqslant} |f(x)-\ell|+|g(x)-\ell'|\leqslant 2\times\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que :

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies |(f+g)(x)-(\ell+\ell')|\leqslant\varepsilon$$

Par définition, $\lim\limits_{x_0}(f+g)=\ell+\ell'$.

• À prouver :

$$\lim_{x_0} f=\ell \text{ et } \lim_{x_0} g=+\infty \implies \lim_{x_0}(f+g)=+\infty$$

Soit $E>0$; posons $E'=\max(2E-\ell,1)>0$. Par définition :

$$\lim_{x_0} f=\ell \implies \exists \alpha_1>0, \forall x\in D, |x-x_0|\leqslant \alpha_1 \implies |f(x)-\ell|\leqslant E$$
$$\lim_{x_0} g=+\infty \implies \exists \alpha_2>0, \forall x\in D, |x-x_0|\leqslant \alpha_2 \implies g(x)\geqslant E'$$

Soit $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$; alors pour tout $x\in D$:

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies \begin{cases}|x-x_0|\leqslant\alpha_1\\|x-x_0|\leqslant\alpha_2\end{cases} \implies \begin{cases}|f(x)-\ell|\leqslant E\\g(x)\geqslant E'\end{cases} \implies \begin{cases}f(x)\geqslant \ell-E\\g(x)\geqslant 2E-\ell\end{cases}$$

et donc en sommant les inégalités :

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies f(x)+g(x)\geqslant \ell-E+2E-\ell\geqslant E$$

Ainsi pour tout $E>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $|x-x_0|\leqslant\alpha \implies (f+g)(x)\geqslant E$.
Par définition $\lim_{x_0}(f+g)=+\infty$. ■

2.2. **Produit.**

Propriété 5.
Si f et g admettent une limite en a alors la limite de leur produit $f\times g$ en a s'obtient à l'aide du tableau suivant :

$\lim_a f$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim_a g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a f\times g$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	IND	$\pm\infty$

où les signes sont obtenus à l'aide de la règle des signes dans un produit.

Démonstration. Montrons par exemple la deuxième, avec $a=x_0\in\mathbb{R}$, $\ell>0$ et $\lim_{x_0} g=+\infty$.

Soit $E>0$. Posons $\varepsilon=\dfrac{\ell}{2}>0$. Par définition :

$$\begin{aligned}\lim_{x_0} f=\ell \implies \exists \alpha_1>0, \forall x\in D, |x-x_0|\leqslant\alpha_1 &\implies |f(x)-\ell|\leqslant\frac{\ell}{2}\\ &\implies \ell-\frac{\ell}{2}\leqslant f(x)\leqslant \ell+\frac{\ell}{2}\\ &\implies \frac{\ell}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3\ell}{2}\end{aligned}$$

Posons $E_1=\dfrac{2E}{\ell}>0$; par définition :

$$\begin{aligned}\lim_{x_0} g=+\infty \implies \exists\alpha_2>0, \forall x\in D, |x-x_0|\leqslant\alpha_2 &\implies g(x)\geqslant E_1\\ &\implies g(x)\geqslant\frac{2E}{\ell}\end{aligned}$$

Posons $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$. Alors $\forall x\in D$:

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies \begin{cases}f(x)\geqslant\frac{\ell}{2}\\g(x)\geqslant\frac{2E}{\ell}\end{cases} \implies f(x)\times g(x)\geqslant\frac{\ell}{2}\times\frac{2E}{\ell}\geqslant E$$

Ainsi : $\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies (f \times g)(x) \geqslant E.$
Par définition, $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = +\infty$. ■

2.3. Inverse.

Propriété 6.
Si f admet une limite en a et si f ne s'annule pas sur un intervalle ouvert I dont a est un élément ou un borne, alors l'inverse $\frac{1}{f}$ est définie sur I et la limite de $\frac{1}{f}$ en a s'obtient à l'aide du tableau suivant :

$\lim\limits_a f$	$\ell \neq 0$	0	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_a \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	IND	$+\infty$	$-\infty$	0

Démonstration. Prouvons par exemple la 3ème en $a = +\infty$; à montrer :
$\lim\limits_{+\infty} f = 0^+ \implies \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{f} = +\infty.$

Soit $E > 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{E} > 0$. Par définition :

$$\exists A_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geqslant A_1 \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$$

Par hypothèse, f ne s'annule pas sur un intervalle de la forme $]A_2, +\infty[$. Posons $A = \max(A_1, A_2)$; alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, x \geqslant A &\implies 0 < f(x) \leqslant \varepsilon = \frac{1}{E} \\ &\implies \frac{1}{f(x)} \geqslant E \end{aligned}$$

Ainsi $\forall E > 0, \exists A \in \mathbb{R}, x \geqslant A \implies \dfrac{1}{f(x)} \geqslant E.$

Par définition $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{f} = +\infty$. ■

2.4. Quotient.

Propriété 7.
Si f et g admettent une limite en a et si g ne s'annule pas sur un intervalle ouvert I dont a est un élément ou un borne, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est définie sur I et sa limite en a s'obtient à l'aide du tableau suivant :

$\lim\limits_a f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	ℓ	$\pm\infty$
$\lim\limits_a g$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_a \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	IND	IND	IND	0	IND

où les signes sont obtenus à l'aide de la règle des signes dans un quotient.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les propriétés 5 et 6 sur la limite du produit et de l'inverse. ■

Remarque. On peut alors appliquer ces résultats en partant de :

Soit $f(x) = x$ l'application identité de $\mathbb{R}$. En tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} x = a$.
Soit $g(x) = c$ une application constante sur $\mathbb{R}$. En tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Démonstration. En effet : il suffit d'appliquer les définitions après avoir remarqué que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leqslant \varepsilon \implies |f(x) - x_0| \leqslant \varepsilon \implies \lim_{x \to x_0} x = x_0$$
$$\forall E > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant E \implies f(x) \geqslant E \implies \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
$$\forall E > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant -E \implies f(x) \leqslant -E \implies \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$
$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |g(x) - c| = 0 \leqslant \varepsilon \implies \lim_{x \to a} c = c$$

Exercice 3. Déterminer les limites éventuelles de :

$$f(x) = \frac{(a+1)x^2 + 3x}{2x - 1}$$

en $+\infty$ et en $\dfrac{1}{2}$, en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Résolution.

3. Limite et composition

3.1. Limite de la composée de fonctions.

Théorème 8. *(Limite d'une composée)*
Soient :
– a et b des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$,
– $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications, avec :
– $D_f \subset \mathbb{R}$ et D_f contient un intervalle ouvert non vide I_a dont a est un élément ou une borne,
– $D_g \subset \mathbb{R}$ et D_g contient un intervalle ouvert non vide I_b dont b est un élément ou une borne
(de sorte que $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b g$ aient un sens),
– et $f(D_f) \subset D_g$
(de sorte que la composée $g \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ soit bien définie).

Alors :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_a f = b\\ \lim\limits_b g = L\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_a g \circ f = L$$
où a, b et L désignent chacun un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas où $a = x_0 \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ et $L = -\infty$; les 26 autres cas se prouvent de manière analogue.

Soit $E > 0$ quelconque ; il faut montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies g \circ f(x) \leqslant -E.$$
Puisque $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, pour ce $E > 0$ il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

(1) $$\forall x \in D_g, x \geqslant A \implies g(x) \leqslant -E.$$
Puisque $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, en posant $A_1 = \max(A, 1) > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

(2) $$\forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant A_1 \geqslant A$$
Puisque $f(D_f) \subset D_g$, alors pour ce $\alpha > 0$:
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \alpha \underset{(2)}{\implies} f(x) \geqslant A \underset{(1)}{\implies} g(f(x)) \leqslant -E$$
Ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow g \circ f(x) \leqslant -E$$
Par définition, $\lim\limits_{x_0} g \circ f = -\infty$. ■

Exemple. • Admettons pour l'instant la limite de exp en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. (On la démontrera plus loin). Déduisons-en la limite de exp en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

Par inverse : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$.

Par composition :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty\\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-(-x)} = 0^+$$
Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

• Admettons pour l'instant la limite de ln en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Déduisons-en la limite de ln en 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

D'une part $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$. Par produit de limite (avec la fonction constante $x \mapsto -1$) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{1}{x} = -\infty$.

Par composition :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -\infty$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

3.2. **Suites et limites de fonctions.**

Nous avons beaucoup utilisé, bien qu'admis pour l'instant, le résultat suivant pour calculer la limite d'une suite :

Théorème 9. *(Théorème de composition des limites)*
Siut $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $D \subset \mathbb{R}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$$

(où a et b peuvent être réels, $+\infty$ ou $-\infty$.)

Démonstration. Prouvons le résultat par exemple pour $a = +\infty$ et $b \in \mathbb{R}$; les autres cas se traitent de manière analogue.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; il faut montrer l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies |f(u_n) - b| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, pour cet $\varepsilon > 0$, il existe une réel A tel que :

$$(1) \qquad \forall x \in D_f, x \geqslant A \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

Par hypothèse, D_f contient un intervalle de la forme $]m; +\infty[$ avec $m > 0$. Posons $A_1 = max(A, m) > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, pour ce $A_1 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n \geqslant A_1 \geqslant A$$

et donc :

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \begin{cases} u_n \geqslant A \\ u_n \in D_f \end{cases} \underset{(1)}{\Longrightarrow} |f(u_n) - b| \leqslant \varepsilon.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \implies |f(u_n) - b| \leqslant \varepsilon$.
Par définition de la limite d'une suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$. ■

Remarque. Nous avons déjà beaucoup utilisé ce résultat (chapitre : suites réelles) pour calculer la limite d'une suite.

Le résultat peut aussi s'employer pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite, comme dans l'exemple qui suit.

Exemple. La fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet : dans le cas contraire, si cos avait pour limite L en $+\infty$, puisque $n\pi \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\cos(n\pi)$ aurait aussi pour limite L en $+\infty$. Or, par 2π-périodicité de cos :

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} \cos(\pi) = -1 & \text{si } n \text{ impair} \\ \cos(0) = 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \implies \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

Puisque $(-1)^n$ n'a pas de limite, cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Un argument analogue permet de montrer qu'il en est de même pour cos en $-\infty$ ainsi que pour la fonction sin en $\pm\infty$.

Exercice 4.

(1) En appliquant le théorème de composition des limites, montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

(2) En appliquant la limite d'une composée, en déduire que cos n'a pas de limite en $-\infty$.

Résolution.

4. Ordre et limite

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ comme précédemment.

4.1. Limite et signe d'une application.

Définition 11. *(Voisinage)*
• *On appelle* *voisinage de $a \in \mathbb{R}$ dans D*, *toute intersection de D et d'un intervalle ouvert contenant a.*
• *On appelle* *voisinage de $+\infty$ dans D* *une intersection de D et d'un intervalle de la forme $]m, +\infty[$.*
• *On appelle* *voisinage de $-\infty$ dans D*, *toute intersection de D et d'un intervalle de la forme $]-\infty, M[$.*

Théorème 10.
Si $\lim_a f = L \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

- *si L est strictement positif ou $+\infty$, alors $f(x)$ est strictement positif sur un voisinage de a dans D,*
- *si L est strictement négatif ou $-\infty$, alors $f(x)$ est strictement négatif sur un voisinage de a dans D.*

Démonstration. On ne montre que le cas où $a = x_0 \in \mathbb{R}$; les autres cas sont analogues (avec des voisinages de $\pm\infty$).

– Si $L = +\infty$; soit $E > 0$. Par définition, pour ce E :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant E > 0$$

Ainsi, pour ce $\alpha > 0$, $\forall x \in D$, si $x \in D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ alors $f(x) > 0$.

– Si $L > 0$; soit $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$. Par définition, pour cet ε :

$$\begin{aligned}\exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha &\implies |f(x) - L| \leqslant \varepsilon = \frac{L}{2} \\ &\implies -\frac{L}{2} \leqslant f(x) - L \leqslant \frac{L}{2} \\ &\implies \underline{0 < \frac{L}{2} \leqslant f(x)} \leqslant \frac{3L}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, pour ce $\alpha > 0$, $\forall x \in D$, si $x \in D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ alors $f(x) > 0$.

– Si $L < 0$ ou $L = -\infty$; il suffit d'appliquer l'un des deux cas précédents à $(-f)$. ■

Corollaire 11.
Supposons que $\lim_a f = L \in \overline{\mathbb{R}}$; alors :
• *Si pour tout x dans un voisinage de a dans D, $f(x) \geqslant m$ alors $L \geqslant m$.*
• *Si pour tout x dans un voisinage de a dans D, $f(x) \leqslant M$ alors $L \leqslant M$.*
• *Si pour tout x dans un voisinage de a dans D, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $m \leqslant L \leqslant M$.*

Démonstration. Montrons le premier ; le second est analogue et le troisième découle des deux premiers.

Par l'absurde : supposons que $\lim_a f = L < m$.

Alors d'après le théorème précédent $f(x) - m$ est strictement négative sur un voisinage $D \cap]a_1, a_2[$ de a dans D.

Or par hypothèse $f(x) - m$ est positive sur un voisinage $D \cap]b_1, b_2[$ de a dans D.

Ainsi sur $D \cap]a_1, a_2[\cap]b_1, b_2[$, $f(x) - m$ est à la fois $\geqslant 0$ et < 0. C'est impossible puisque par hypothèse (D contient un voisinage de a) $D \cap]a_1, a_2[\cap]b_1, b_2[$ est non vide.
■

Remarques.
– Attention les inégalités sont larges : c'est faux avec des inégalités strictes, i.e. si l'inégalité est stricte tout ce qu'on peut conclure est :

$$\forall x \in D, \underbrace{f(x) > m}_{\text{strict}} \implies \underbrace{f(x) \geqslant m}_{\text{large}} \implies \underbrace{L \geqslant m}_{\text{large}}$$

Contre-exemple : $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} e^x = 0$.

– Rédaction : $f(x) \geqslant m$ et $\lim_a f = L$, alors <u>par passage à la limite</u> $L \geqslant m$.

> **Corollaire 12.** *Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$.*
> *Si $\lim_a f = L$ et $\lim_a g = L'$ et si pour tout x dans un voisinage de a : $f(x) \leqslant g(x)$, alors : $L \leqslant L'$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire 11 à $g - f$ qui reste positive sur un voisinage de a. ■

4.2. Théorème des gendarmes.

4.2.1. *Cas d'une limite finie.*

> **Théorème 13.** *Soient f, g, h trois applications de D dans $\mathbb{R}$. Si pour tout x dans un voisinage de a dans D :*
> $$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$
> *alors*
> $$\left.\begin{array}{l} \lim_a f = \ell \\ \lim_a h = \ell \end{array}\right\} \implies \lim_a g = \ell.$$
> *où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On le prouve dans le cas où $a = x_0 \in \mathbb{R}$; les deux autres cas sont analogues.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; par définition :

$$\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha_1 \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$\exists \alpha_2 > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha_2 \implies |h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\alpha' = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. Alors $\forall x \in D$:

$$|x - x_0| \leqslant \alpha' \implies \begin{cases} |x - x_0| \leqslant \alpha_1 \\ |x - x_0| \leqslant \alpha_2 \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ |h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} -\varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant \varepsilon \\ -\varepsilon \leqslant h(x) - \ell \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Mais par hypothèse $\exists \alpha_3 > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha_3 \implies f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Posons $\alpha = \min(\alpha', \alpha_3)$, alors pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leqslant \alpha &\implies -\varepsilon \leqslant f(x) - L \leqslant g(x) - L \leqslant h(x) - L \leqslant \varepsilon \\ &\implies |g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{a} g = \ell$. ■

Exemple. L'étude des variations montre que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$ (cf. TD1). Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\underbrace{1 - \frac{x^2}{6}}_{\underset{0}{\longrightarrow} 1} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$

d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Par parité de $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$, on a aussi $\lim\limits_{0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Et donc, puisque $\dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Exercice 5. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

(1) En déduire la limite en 0 de $\dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

(2) Retrouver cette limite en transformant l'expression pour appliquer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Résolution.

4.2.2. *Cas d'une limite infinie.*

Théorème 14. *Soient f et g deux applications définies sur D et à valeur dans $\mathbb{R}$. Si pour tout x dans un voisinage de a dans D :*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

alors :

$$\lim_a f = +\infty \implies \lim_a g = +\infty$$
$$\lim_a g = -\infty \implies \lim_a f = -\infty$$

où $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On ne montre que le cas où $a = x_0 \in \mathbb{R}$; les autres cas sont analogues.
Par hypothèse il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\forall x \in \ D \cap]a-\alpha_0, a+\alpha_0[,\ f(x) \leqslant g(x)$.

– Si $\lim_a f = +\infty$. Soit $E > 0$; par définition :

$$\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leqslant \alpha_1 \implies f(x) \geqslant E$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1)$; alors $\forall x \in D$:

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \implies \begin{cases} |x - x_0| \leqslant \alpha_0 \\ |x - x_0| \leqslant \alpha_1 \end{cases} \implies \begin{cases} g(x) \geqslant f(x) \\ f(x) \geqslant E \end{cases} \implies g(x) \geqslant E.$$

Ainsi $\lim_a g = +\infty$.

– Si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a(-g) = +\infty$ (par produit) et dans un voisinage de a dans D, $-g(x) \leqslant -f(x)$, donc d'après le point précédent $\lim_a(-f) = +\infty$ et par produit $\lim_a f = -\infty$ ■

Exemple. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
La fonction $x \longmapsto e^x - x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $\exp' = \exp$ est strictement positive et $\exp(0) = 1$).
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geqslant x$. Or $\lim_{+\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$.

Exercice 6. Soient $f(x) = 2 - \cos(x)$ et $g(x) = x(2 - \cos(x))$. Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$ tandis que $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

Résolution.

5. Théorème de la limite monotone

Notations.
Soit I un intervalle et f une application définie sur I.

Si l'image directe $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ est majoré alors $f(I)$ admet une borne supérieure que l'on note : $\sup_I f = \sup f(I)$.

Si l'image directe $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ est minoré alors $f(I)$ admet une borne inférieure que l'on note : $\inf_I f = \inf f(I)$.

Théorème 15. *(Théorème de la limite monotone)*
Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non vide avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{R}$. Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante, alors :

- *Si f est majorée sur I alors $\lim_b f = \sup_I f$.*
- *Si f n'est pas majorée sur I alors $\lim_b f = +\infty$.*
- *Si f est minorée sur I alors $\lim_a f = \inf_I f$.*
- *Si f n'est pas minorée sur I alors $\lim_a f = -\infty$.*

Démonstration. On le prouve dans le cas où a et b sont réels ; les autres cas sont analogues.

– Si f est majorée sur I : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leqslant M$. Ainsi $f(I)$ est majoré et $\sup_I f = \sup f(I)$ existe.

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\sup_I f$ est le plus petit majorant de $f(I)$, $\sup_I f - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(I)$, et donc :

$$\exists x_1 \in]a, b[,\ \sup_I f - \varepsilon < f(x_1) \leqslant \sup_I f$$

Ainsi puisque f est croissante sur $]a, b[$:

$$\forall x \in]a, b[, x \geqslant x_1 \implies \sup_I f - \varepsilon < f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant \sup_I f$$

Posons $\alpha = b - x_1 > 0$; $\forall x \in I$:

$$x_1 \leqslant x < b \iff x_1 - b \leqslant x - b < 0 \iff -\alpha \leqslant x - b < 0 \iff |x - b| \leqslant \alpha$$

Posons $\ell = \sup_I f$; on a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, |x - b| \leqslant \alpha &\implies \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell \\ &\implies \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \\ &\implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi par définition $\lim_{x \to b} f(x) = \ell = \sup_I f$.

– Si f n'est pas majorée : soit $E > 0$; ce n'est pas un majorant de f et donc $\exists x_1 \in]a, b[, f(x_1) > E$.
Puisque f est croissante :

$$\forall x \in I, x \geqslant x_1 \implies f(x) \geqslant f(x_1) > E$$

Posons $\alpha = b - x_1 > 0$; alors (comme ci-dessus) pour $x \in I$, $|x - b| \leqslant \alpha \iff x_1 \leqslant x < b$, et donc :

$$\forall x \in I, |x - b| \leqslant \alpha \implies x_1 \leqslant x < b \implies f(x) \geqslant E$$

Ainsi

$$\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - b| \leqslant \varepsilon \implies f(x) \geqslant E$$

donc $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Pour les deux cas restants (limite en a), soit on procède de manière analogue en changeant majorant en minorant, sup en inf et b en a, soit on applique les deux points déjà démontrés à $x \longmapsto -f(-x)$ qui est définie et croissante sur l'intervalle $]-b, -a[$ puis on conclut à l'aide des théorèmes sur la limite d'une composée ou d'un produit. ■

Remarque. Le théorème permet aussi de traiter le cas d'une fonction décroissante, en l'appliquant à $(-f)$ qui est croissante. On obtient :

Soit f décroissante sur $]a, b[$:

- Si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{b} f = \inf\limits_{I} f$.
- Si f n'est pas minorée sur I alors $\lim\limits_{b} f = -\infty$.
- Si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{a} f = \sup\limits_{I} f$.
- Si f n'est pas majorée sur I alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

Exemple. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

La fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$ puisque c'est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi il suffit de montrer que ln n'est pas majorée. Par l'absurde si $\exists M \in \mathbb{R}, \ln(x) \leqslant M$ alors par croissance de exp : $x \leqslant e^M$. C'est impossible puisque $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ (appliquer la définition avec $E = e^M > 0$).

Exercice 7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ croissante et majorée vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est constante.

Résolution.

Corollaire 16. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle $I =]a, b[$.*
Alors f admet en tout point $x_0 \in I$ une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche, finies.
De plus si f est croissante :

$$\lim_{x_0^-} f \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x_0^+} f$$

et si f est décroissante :

$$\lim_{x_0^+} f \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x_0^-} f.$$

Démonstration. On le prouve dans le cas où f est croissante ; l'autre cas s'en déduit en considérant $(-f)$.

Considérons la restriction $\overline{f}$ de f à $]a, x_0[$; $\overline{f}$ est majorée par $f(x_0)$ et donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0} \overline{f} = \sup_{]a,x_0[} f$.

De même en considérant la restriction $\overline{f}$ de f à $]x_0, b[$, qui est minorée par $f(x_0)$: $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0} \overline{f} = \inf_{]x_0,b[} f$.

De plus puisque f est croissante :

$$\forall x \in \,]a, x_0[, f(x) \leqslant f(x_0) \text{ donc par passage à la limite } \lim_{x_0^-} f \leqslant f(x_0)$$
$$\forall x \in \,]x_0, b[, f(x_0) \leqslant f(x) \text{ donc par passage à la limite } f(x_0) \leqslant \lim_{x_0^+} f$$

■

Exemple. On retrouve que la fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ admet en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ une limite à droite et une limite à gauche, finies. (Mais pas de limite en $x_0 \in \mathbb{Z}$!)

Exercice 8. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. (Exemple : ln). Montrons que $\forall x_0 > 0, \lim_{x_0} f = f(x_0)$ (*i.e.* f est continue.)

(1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Obtenir un encadrement de $f(x_0)$ par $\lim_{x_0^-} f$ et $\lim_{x_0^+} f$.

(2) Obtenir un encadrement de $g(x_0)$ par $\lim_{x_0^-} g$ et $\lim_{x_0^+} g$; en déduire un autre encadrement de $f(x_0)$ par $\lim_{x_0^-} f$ et $\lim_{x_0^+} f$.

(3) Conclure.

Résolution.

6. Limites usuelles et méthodes pour lever une indéterminée

6.1. **Limites usuelles.**

On établit les limites des fonctions usuelles. Combiné avec les résultats sur les effets des opérations somme, produit, inverse, quotient, ainsi que de la composition, sur les limites, elle permettent le calcul de limite dans de très nombreux cas, sauf forme indéterminée.

6.1.1. *Limite en x_0 d'une application continue.*

On admet pour l'instant le résultat suivant qui sera établi dans les chapitres "Continuité" et "Dérivabilité" :

• Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application <u>continue</u>.
Alors pour tout $x_0 \in D$:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
• Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application <u>dérivable</u>. Alors f est continue.

Démonstration. Nous verrons que cela découle immédiatement des définitions de la continuité et de la dérivabilité d'une application. ■

6.1.2. *Limite en $\pm\infty$ d'une application polynômiale.*

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une application polynomiale.
Alors les limites en $\pm\infty$ de f sont égales aux limites de son monôme de plus haut degré.

Démonstration. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

– Si f est le polynôme nul, f est constante et ses limites en $\pm\infty$ sont nulles.
– Si $\deg f = n \in \mathbb{N}$; on factorise le monôme de plus haut degré puis on applique les limites d'une somme, d'un produit et d'un quotient :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{a_n\neq 0}{=} a_n x^n \times \underbrace{\left(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x^{1-n} + \frac{a_0}{a_n}x^{-n}}_{\underset{\pm\infty}{\longrightarrow}0}\right)}_{\underset{\pm\infty}{\longrightarrow}1}$$

■

6.1.3. *Limite d'une application circulaire.*

• Les applications cos, sin et tan n'admettent pas de limite en $\pm\infty$.
• tan et arctan admettent les limites suivantes :
$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \lim_{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan = +\infty \quad ; \quad \lim_{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan = -\infty$$
$$\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Pour cos, sin et tan il suffit de considérer, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\cos\underbrace{(\pm n\pi)}_{\longrightarrow\pm\infty} = \sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} \pm n\pi\right)}_{\longrightarrow\pm\infty} = (-1)^n \quad ; \quad \tan\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} \pm n \times \frac{\pi}{2}\right)}_{\longrightarrow\pm\infty} = (-1)^n$$

puis d'appliquer le théorème de composition des limites avec le fait déjà établi que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Les limites à gauche et à droite de tan en $\frac{\pi}{2}$ s'obtiennent par quotient des limites attendu que (par continuité et signe de cos et sin) :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0^-$$

Les limites à gauche et à droite de tan en $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) s'en déduisent par π-périodicité de tan.

L'application arctan est strictement croissante (car $\arctan' = \frac{1}{1+x^2}$) et impaire (car tan est impaire) sur $\mathbb{R}$ (cf. chapitre "Fonctions usuelles").

D'après le théorème de la limite monotone, arcctan admet donc pour limites L et $-L$ respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.

D'autre part, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$. Ainsi d'après le théorème de limite d'une composée :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\frac{\pi}{2}^-} x = L \Longrightarrow L = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. ■

On dispose aussi des limites remarquables suivantes en 0, qui permettent de lever des indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_0 \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_0 \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_0 \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Démonstration. La première a déjà été démontrée en exemple.
La seconde s'en déduit par quotient des limites puisque $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$.
Pour la troisième : on applique à $\cos x$ le développement de $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ avec la première limite remarquable :

$$\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[0]{} 1$$

par produit et composée des limites. ■

6.1.4. *Limites en* ln *et* exp.

On a déjà établi les limites de ln et exp aux bornes de leur domaine de définition :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} \exp x = 0^+.$$

On dispose aussi des limites remarquables en 0 qui permettent de lever des indéterminées de la forme $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Démonstration. Les deux s'obtiennent grâce à la dérivabilité de ln et exp ; ce sont en effet les limites des taux d'accroissement respectivement en 1 de ln et en 0 de exp. ■

Finalement pour lever des indéterminées de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $0\times\infty$ on dispose des résultats de croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} x\exp x = 0^-.$$

Plus généralement, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\beta>0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta|\ln x|^\alpha = 0^+$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0^+.$$

Démonstration. Ces résultats ont déjà été démontrés dans le chapitre "Fonctions usuelles". ■

Exercice 9. Déterminer les limites éventuelles en $+\infty$ de :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad ; \quad \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Résolution.

6.2. Méthodes pour lever une indéterminée.

6.2.1. *Comment lever une indéterminée en $\pm\infty$?*

• Dans le cas d'une indéterminée "$\infty - \infty$", factoriser le terme qui impose sa limite (celui tendant le plus rapidement vers ∞) ; en présence de monômes, exp et ln utiliser la croissance comparée.
Exemple : $e^{\frac{x}{2}} - \ln x - x^3$ en $+\infty$:

$$e^{\frac{x}{2}} - \ln x - x^3 = e^{\frac{x}{2}} \times \left(1 - \frac{\ln x}{e^{\frac{x}{2}}} - \frac{x^3}{e^{\frac{x}{2}}}\right) = e^{\frac{x}{2}} \times \left(1 - \underbrace{\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} - \frac{x^3}{e^{\frac{x}{2}}}}_{\longrightarrow 0}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

• Dans le cas d'une indéterminée "$\infty - \infty$", et en présence de racines carrées, factoriser sous les racines le terme dominant permet souvent de lever l'indéterminée.

Exemple (en $+\infty$) : $$\sqrt{x^2+1} - 2x = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x$$
$$= |x| \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x \underset{x>0}{=} \underbrace{x}_{\longrightarrow +\infty} \times \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2\right)}_{\longrightarrow -2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

• Lorsque ça ne fonctionne pas : utiliser le radical conjugué :

Exemple (en $+\infty$) : $$\sqrt{x^2+1} - x \underset{x>0}{=} \underbrace{x}_{\longrightarrow +\infty} \times \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right)}_{\longrightarrow 0} \qquad \text{IND}$$
$$= \frac{(\sqrt{x^2+1} - x) \times (\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0^+$$

• Dans le cas d'une <u>fraction rationnelle</u> et d'une indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$", factoriser aux numérateur et dénominateur les monômes de plus haut degré, puis simplifier :

Exemple : $$\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \underset{\pm\infty}{\underset{\downarrow}{x}} \times \frac{\overbrace{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}^{\longrightarrow 1}}{\underbrace{2 + \frac{1}{x}}_{\longrightarrow 2}} \longrightarrow \pm\infty$$

• Plus généralement dans le cas d'une indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$" factoriser aux numérateur et dénominateur les termes qui imposent leur limite ; en présence de monômes, exp et ln appliquer la croissance comparée.

Exemple (en $+\infty$) : $$\frac{x^2 + x \ln x}{e^{2x} + x^3} = \underbrace{\frac{x^2}{e^{2x}}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1 + \overbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}^{\longrightarrow 0}}{1 + \underbrace{x^3 e^{-2x}}_{\longrightarrow 0}}}_{\longrightarrow 1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• Dans certains cas, se ramener à un limite usuelle en 0 en posant $h = \dfrac{1}{x}$ ou $h = e^{-x}$ (en $+\infty$) ou $h = e^x$ (en $-\infty$).
Exemple ; en $+\infty$, en posant $h = \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0^+$:

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+h)}{h} \longrightarrow 1$$

Exemple ; en $-\infty$, en posant $h = e^x \longrightarrow 0^+$:

$$e^{-x} \ln\left(1 + e^x\right) = \frac{\ln(1+h)}{h} \longrightarrow 1$$

6.2.2. *Comment lever une indéterminée en 0 ?*
• Dans le cas d'une fraction rationnelle (indéterminée "$\frac{0}{0}$") on factorise par x aux numérateur et dénominateur puis on simplifie, tant que nécessaire.

$$\text{Exemple : } \quad \frac{x^2+2x}{x^2-x} = \frac{x(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \longrightarrow -2$$

Cela revient à factoriser par le monôme de plus bas degré : au voisinage de 0, c'est le terme dominant !

• En présence de racine carrée, factoriser sous la racine le terme dominant ; si ça ne marche pas utiliser le radical conjugué.

$$\begin{aligned}\text{Exemple : } \quad \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \longrightarrow \frac{1}{2}\end{aligned}$$

• Dans les autres cas on transforme l'expression et on utilise une limite usuelle en 0.

$$\text{Exemple : } \quad \frac{\sin x}{1-e^x} = -\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\longrightarrow 1} \times \underbrace{\frac{x}{e^x-1}}_{\longrightarrow 1} \underset{0}{\longrightarrow} -1$$

6.2.3. *Comment lever une indéterminée en* $0^\pm$ *?*
Lorsque on n'a pas réussi à lever l'indéterminée en $0^\pm$ on peut poser $h = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers $\pm\infty$, pour se ramener à une limite en ∞.
Exemple : en 0^+. On pose $h = \dfrac{1}{x} \longrightarrow +\infty$:

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+h} - \sqrt{1+h^2} = h\left(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}}}_{\longrightarrow 0} - \underbrace{\sqrt{\frac{1}{h^2}+1}}_{\longrightarrow 1}\right) \underset{h \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

6.2.4. *Comment lever une indéterminée en* $a \in \mathbb{R}^*$ *?*
• Dans le cas d'une fraction rationnelle (indéterminée "$\frac{0}{0}$") on factorise par $(x-a)$ aux numérateur et dénominateur puis on simplifie, tant que nécessaire.

$$\text{Exemple : } x \longrightarrow -1. \quad \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \longrightarrow 0$$

• Dans les autres cas : poser $h = x - a \longrightarrow 0$ pour se ramener à une limite en 0. On peut souvent se ramener ensuite à une limite usuelle en 0.

Exemple : $\lim\limits_{\pi} \dfrac{\sin 2x}{x-\pi} = 2$. En effet, en posant $h = x - \pi \implies x = h + \pi$:

$$\frac{\sin 2x}{x-\pi} = \frac{\sin(2\pi + 2h)}{h} = \frac{\sin 2\pi \cos 2h + \sin 2h \cos 2\pi}{h} = \frac{\sin 2h}{h} = 2 \times \frac{\sin 2h}{2h} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 2$$

6.2.5. *Comment lever une indéterminée en $a^{\pm}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$?*

Poser $h = \dfrac{1}{x-a} \underset{x \longrightarrow a^{\pm}}{\longrightarrow} \pm\infty$, permet de se ramener à une limite en ∞.

Exercice 10. Déterminer :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x^2+2} - 3x \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x^2+2x-1} - x \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Résolution.

7. Équivalence de fonction

7.1. Définition et exemples.

Définition 12. *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D voisinage de a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a.*
On dit f est équivalente à g en a si $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$ (ou $f \sim g$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).

Remarque. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$; en effet si $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$ alors $\lim\limits_a \dfrac{g}{f} = 1$.

Exemples.

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$$

Les 5 premières découlent des limites usuelles en 0.
La dernière découle de $\lim\limits_0 \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ deja établi (utiliser le radical conjugué).

Exemple. Pour un polynôme $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_n x^n$ avec $m < n$ et $a_m \neq 0$, $a_n \neq 0$.

$$P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n \qquad P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$$

Par exemple, si $P(x) = 2 + x + 3x^2$:

$$P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} 3x^2 \qquad P(x) \underset{0}{\sim} 2 \qquad P(x) - 2 \underset{0}{\sim} x.$$

7.2. Propriétés.

7.2.1. *Transitivité :*

$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ g \underset{a}{\sim} h \end{array}\right\} \Longrightarrow f \underset{a}{\sim} h$$

Démonstration. $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \lim\limits_a \dfrac{g}{h} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_a \dfrac{f}{h} = 1$ par limite d'un produit. ∎

7.2.2. *Produit :*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_1 \times f_2 \underset{a}{\sim} g_1 \times g_2$$

Démonstration. $\lim\limits_a \dfrac{f_1}{g_1} = \lim\limits_a \dfrac{f_2}{g_2} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_a \dfrac{f_1 \times f_2}{g_1 \times g_2} = 1$ par limite d'un produit.
∎

7.2.3. *Inverse :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$$

Démonstration. $\lim_a \frac{f}{g} = 1 \implies \lim_a \frac{g}{f} = 1 \implies \lim_a \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}}$ par limite de l'inverse. ∎

7.2.4. *Quotient :*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \implies \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$$

Démonstration. Découle de l'équivalent d'un inverse et d'un produit. ∎

7.2.5. *Puissance :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \forall n \in \mathbb{Z},\ f^n \underset{a}{\sim} g^n$$

Démonstration. $\lim_a \frac{f}{g} = 1 \implies \lim_a \frac{f^n}{g^n} = 1$ par limite d'une composée. ∎

7.2.6. *Valeur absolue :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies |f| \underset{a}{\sim} |g|$$

Démonstration. $\lim_a \frac{f}{g} = 1 \implies \lim_a \frac{|f|}{|g|} = 1$ par limite d'une composée. ∎

7.2.7. *Puissance réelle :*

Si f et g ne prennent que des valeurs > 0 sur un voisinage de a, alors :

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \forall \beta \in \mathbb{R},\ f^\beta \underset{a}{\sim} g^\beta$$

Démonstration. Puisque f et g restent strictement positives sur un voisinage de a, $f^\beta = \exp\circ(\beta.\ln\circ f)$ et $g^\beta = \exp\circ(\beta.\ln\circ g)$ sont bien définies et non nulles sur un voisinage de a.

$$\frac{f(x)^\beta}{g(x)^\beta} = \frac{\exp(\beta\ln(f(x)))}{\exp(\beta\ln(g(x)))} = \exp(\beta(\ln(f(x)) - \ln(g(x)))) = \exp\left(\beta\ln\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

Par composition des limites (appliqué deux fois) :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1 \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)^\beta}{g(x)^\beta} = 1 \implies f^\beta \underset{a}{\sim} g^\beta$$

∎

7.2.8. *Opérations ne préservant par l'équivalence.*

Attention ces deux opérations importantes ne préservent pas en général l'équivalence :

• Somme :

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \text{ n'implique pas en général } \ f_1+f_2 \underset{a}{\sim} g_1+g_2.$$

Contre-exemple :

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+1 \underset{+\infty}{\sim} x^2 \\ -x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^2-2 \end{array}\right\} \text{ Or } \ x+1 \underset{+\infty}{\not\sim} -2$$

• Composition à gauche :

$$f_1 \underset{a}{\sim} f_2 \text{ n'implique pas en général } g\circ f_1 \underset{a}{\sim} g\circ f_2.$$

Contre-exemple : $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ et $e^{x+1} \underset{+\infty}{\not\sim} e^x$ puisque $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Par contre sous certaines conditions on dispose d'un résultat pour la composition à droite :

7.2.9. *Substitution*.

$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ \lim\limits_{b} u(t) = a \end{array}\right\} \Longrightarrow f(u(t)) \underset{b}{\sim} g(u(t))$$

Démonstration. En appliquant la limite d'une composée :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{b} u(t) = a \\ \lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{b} \frac{f(u(t))}{g(u(t))} = 1 \Longrightarrow f(u(t)) \underset{b}{\sim} g(u(t))$$

■

Remarque. En particulier : lorsque $\lim\limits_{a} u(t) = 0$:

$$\sin u(t) \underset{a}{\sim} u(t) \qquad \tan u(t) \underset{a}{\sim} u(t) \qquad 1-\cos u(t) \underset{a}{\sim} \frac{u(t)^2}{2}$$

$$e^{u(t)}-1 \underset{a}{\sim} u(t) \qquad \ln(1+u(t)) \underset{a}{\sim} u(t) \qquad \sqrt{1+u(t)}-1 \underset{a}{\sim} \frac{u(t)}{2}$$

7.3. **Limites et équivalents.**

Théorème 17.

$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ \lim\limits_{a} f = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{a} g = L$$

(où $L \in \overline{\mathbb{R}}$.)

Démonstration. Puisque $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1 \implies \lim\limits_a \dfrac{g}{f} = 1$, et puisque $\lim\limits_a f = L$, par produit des limites $\lim\limits_a g = L$. ■

Remarque. C'est la motivation principale des équivalents de fonctions : le calcul de limite.

7.4. Équivalent de suite et de fonction.

Propriété 18. *Soit (u_n) une suite à valeur dans D ; si $f(u_n)$ et $g(u_n)$ ne s'annulent pas à partir d'une certain rang, alors :*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ f \underset{a}{\sim} g \end{array}\right\} \implies f(u_n) \sim g(u_n)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de composition des limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim_a \dfrac{f}{g} = 1 \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)}{g(u_n)} = 1$$

■

7.4.1. *Exemples.*

Exercice 11. Montrer (à l'aide d'équivalent) que :

$$a)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin(1-\cos x)}{x} = 0 \quad ; \quad b)\ \lim_{x\to-\infty} x\ln(e^x+1) = 0$$

Résolution.