Chapitre 18

# Espaces probabilisés finis

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

## 1. Expérience aléatoire, univers associé et évènements

### 1.1. Expérience aléatoire et univers associé.

**Définition 1.**
• *On appelle expérience aléatoire une expérience dont les issues possibles sont connues a priori et peuvent varier lorsqu'on renouvelle l'expérience.*
• *On associe à une expérience aléatoire un ensemble $\Omega$, appelé univers, dont les éléments sont toutes les issues possibles de l'expérience. Ses éléments sont appelés les issues ou éventualités.*

**Remarque.** Dans tout ce chapitre on ne considérera que des expériences aléatoires dont l'univers est fini : il y a un nombre fini d'issues possibles (ou éventualités).

Le cas des univers infinis ne sera traité qu'en deuxième année.

**Exemples.**
• On lance un dé 6 ; on s'intéresse au numéro de face obtenu : c'est l'expérience aléatoire. Pour univers associé on prendra $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

• On tire une carte parmi un jeu de 32 cartes. C'est l'expérience aléatoire.
On s'intéresse à sa valeur et sa couleur.
On peut prendre comme univers : $\Omega = \{7\spadesuit, 8\spadesuit, \dots, \text{Roi}\clubsuit, \text{As}\clubsuit\}$ ;
mais aussi $\Omega = \{7, 8, \dots, \text{Roi}, \text{As}\} \times \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ ;
ou encore $\Omega = [\![1, 32]\!]$ une fois décidé d'une numérotation des cartes (par exemple par couleur $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ puis par valeur $7, \dots, 10$, Valet, Dame, Roi, As).
Dans tous les cas l'univers a pour cardinal 32.

• On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Les éventualités sont les combinaisons de 5 cartes parmi 32 cartes. On peut prendre pour univers l'ensemble des 5-combinaisons dans $\{7\spadesuit, 8\spadesuit, \dots, \text{Roi}\clubsuit, \text{As}\clubsuit\}$ ; l'univers a pour cardinal $\binom{32}{5}$.

**Remarque.** Le choix de l'univers dépend de la question posée. Si par exemple on lance deux dés, l'un blanc l'autre noir.
– Si l'on s'intéresse au résultat des deux dés, en distinguant les 2 dés
(ex : (1 blanc, 6 noir) $\neq$ (6 blanc, 1 noir)),
les éventualités sont les 2-listes (ou couples) d'éléments dans $[\![1, 6]\!]$ ; l'univers est :

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2 = \{(1, 1), (1, 2), \dots (6, 5), (6, 6)\}$$

(après avoir convenu que la première composante est le résultat du dé blanc, la deuxième celui du dé noir, par exemple). L'univers a pour cardinal $36 = 6^2$.
– Si l'on s'intéresse au résultat des deux dés sans distinguer les deux dés

(ex : (1 blanc, 6 noir) = (6 blanc, 1 noir)),
on peut prendre pour univers :

$$\Omega = \left\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i \leqslant j\right\}$$

de sorte que chaque résultat, "un dé donne $i$ et l'autre $j$", ne soit comptabilisé qu'une seule fois comme éventualité.
Le cardinal est $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21$ (nombre de doubles + nombre de non-doubles) ; en effet :

$$\Omega = \underbrace{\left\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i = j\right\}}_{\text{autant que de 1-combinaisons}} \cup \underbrace{\left\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i < j\right\}}_{\text{autant que de 2-combinaisons}}$$

et la réunion est disjointe.
– Si l'on ne s'intéresse qu'à la somme des deux nombres obtenus, on peut prendre : $\Omega = [\![2, 12]\!]$ ; Card $\Omega = 11$.

### 1.2. Événements.

**Définition 2.**
*On considère une expérience aléatoire et sont univers associé $\Omega$.*
- *On appelle événement toute partie de $\Omega$.*
- *L'ensemble des événements est $\mathscr{P}(\Omega)$.*
- *On appelle événement élémentaire tout évènement qui est un singleton (i.e. un événement réduit à une seule éventualité).*
- *On appelle événement impossible : $\varnothing$.*
- *On appelle événement certain : $\Omega$.*
- *Soit $A \subset \Omega$ un évènement ; son événement contraire est $\overline{A} = \complement_\Omega A$.*
- *Deux événements $A$ et $B$ sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.*
- *On dit que l'événement $A$ implique l'événement $B$ si $A \subset B$.*
- *L'événement "$A$ ou $B$" est l'événement $A \cup B$.*
- *L'événement "$A$ et $B$" est l'événement $A \cap B$.*

**Exemple.** On lance un dé 6 ; on prend pour univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
– L'événement "le résultat est pair" est la partie $P = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.
– L'événement "le résultat est impair" est la partie $I = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$.
– Ces deux événements ont incompatibles : leur intersection est vide. Autrement dit l'événement "$P$ et $I$" est l'événement impossible.
– Ces deux événement sont contraires : $P = \overline{I}$.
– L'événement "obtenir 7" est l'événement impossible : $\varnothing$.
– Les événement élémentaires sont les singletons : $\{1\}$, $\{2\}$, $\dots \{6\}$.
– L'événement "le résultat est pair" implique l'événement "le résultat est au moins 2" ; en effet $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

**Exercice 1.**
On lance deux fois un dé 6. En prenant pour univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ décrire mathématiquement les événements suivants :
– $A$ : "le premier lancer donne 1, le deuxième donne 6",
– $B$ : "le deuxième lancer donne 6",

– $C$ : "la somme des deux lancers donne 5",
– $D$ : "le premier lancer donne un résultat inférieur ou égal au second".

**Résolution.**

**Exercice 2.** Soient $A, B, C$ 3 événements d'un univers $\Omega$. Écrire en fonction de $A, B, C$ les événements suivants :
– "les événements $A, B, C$ sont tous les 3 réalisés",
– "les événements $A, B, C$ ne sont pas tous les 3 réalisés",
– "aucun des événements $A, B, C$ n'est réalisé",
– "seul $A$ est réalisé",
– "seul l'un des trois est réalisé",
– "au plus deux sont réalisés",
– "si $A$ et $B$ sont réalisés alors $C$ aussi".

**Résolution.**

## 2. Espaces probabilisables finis

### 2.1. Définition.

**Définition 3.**
*On appelle espace probabilisable fini le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où $\Omega$ est un ensemble fini et $\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble de ses parties, ou évènements.*

### 2.2. Système complet d'évènements.

**Définition 4.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On appelle système complet d'évènement, ou partition de $\Omega$, toute famille d'événements $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant :*

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Autrement dit une famille d'événements 2 à 2 incompatibles dont la réunion est l'univers $\Omega$.

**Exemples.**
– Pour tout événement $A$, la famille $A$, $\overline{A}$ forme un système complet d'événements.
– Trois urnes contiennent chacune des boules blanches et des boules noires. L'expérience consiste à choisir une urne au hasard et à tirer une boule dans l'urne. Prenons pour univers $\Omega = [\![1,3]\!] \times \{B,N\}$.
– $A_1 = \{1\} \times \{B,N\}$ est l'événement : "on choisit l'urne 1".
– $A_2 = \{2\} \times \{B,N\}$ est l'événement : "on choisit l'urne 2".
– $A_3 = \{3\} \times \{B,N\}$ est l'événement : "on choisit l'urne 3".
$A_1, A_2, A_3$ forment un système complet d'événements.
Durant l'expérience, un et un seul des événements $A_1, A_2, A_3$ sera réalisé.

### 2.3. Partition d'un événement.

Plus généralement :

**Définition 5.**
*Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable et $A \subset \Omega$ un événement. Une partition de l'événement $A$ est une famille $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'événements tels que :*

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$,
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

**Remarque.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements, et si $A$ est un événement, la famille $A \cap A_1, A \cap A_2, \ldots, A \cap A_n$ est une partition de l'événement $A$.
En effet :

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{=1}^{n} A_i = A \cap \Omega = A$$

$$i \neq j \implies (A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = (A \cap A) \cap (A_i \cap A_j) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

## 3. Espaces probabilisés finis

### 3.1. Probabilité.

**Définition 6.**
• *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ (ou probabilité sur $\Omega$), toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \varnothing \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

• *On appelle espace probabilisé fini tout triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable fini et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.*

• *Si $A$ est un événement, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de l'événement $A$.*
*La probabilité de l'événement certain est $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. La probabilité de l'événement impossible est $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.*

### 3.2. Probabilité uniforme.

**Proposition-Définition 7.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisé fini ; l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_u : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} \end{array}$$

*est une probabilité appelée probabilité uniforme.*

**Démonstration.** L'application $\mathbb{P}_u$ est bien définie car $\Omega$ est fini non vide donc Card $\Omega \neq 0$ et :

$$A \subset \Omega \implies 0 \leqslant \text{Card } A \leqslant \text{Card } \Omega \implies \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} \in [0,1].$$

Montrons que $\mathbb{P}_u$ est une probabilité.

– $\mathbb{P}_u(\Omega) = \dfrac{\text{Card } \Omega}{\text{Card } \Omega} = 1$.

– Soient $A, B$ deux événements incompatibles. Alors $A \cap B = \varnothing \implies \text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B$ donc :

$$\mathbb{P}_u(A \cup B) = \frac{\text{Card } A + \text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} + \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \mathbb{P}_u(A) + \mathbb{P}_u(B)$$

■

**Remarque.** Quand choisir la probabilité uniforme ?

Lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables (c'est-à-dire de même probabilité $\frac{1}{\text{Card } \Omega}$).

C'est le cas implicitement lorsque dans l'énoncé on a les locutions : "on choisit au hasard...", "on lance un dé non-pipé", "on lance une pièce équilibrée".

**Exercice 3.** On lance un dé 6 non-pipé. Quelle est la probabilité $p$ d'obtenir un chiffre pair ?

**Résolution.**

**Exercice 4.** On lance 2 dés 6 non-pipés. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit égale à 2 ? à 3 ? à 4 ?

**Résolution.**

### 3.3. Exemple de probabilité non-uniforme.

**Exemple.**
Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, 3 blanches et 2 noires. On tire une boule dans l'urne et on s'intéresse à sa couleur ; les issues possibles sont blanc et noir. On choisit comme univers $\Omega = \{B, N\}$ ; quel espace probabilisé considérer ? (ou en d'autres termes de quelle probabilité $\mathbb{P}$ le munir ?) Pour cela il faut définir l'image par $\mathbb{P}$ de tous les éléments de $\mathscr{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, \{B\}, \{N\}, \{B, N\}\Big\}$.

Par définition : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}\left(\{B, N\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. On définit $\mathbb{P}$ en posant :

$$\mathbb{P}\left(\{B\}\right) = \frac{3}{5} \qquad ; \qquad \mathbb{P}\left(\{N\}\right) = \frac{2}{5}.$$

En effet : changeons l'univers pour nous retrouver dans une situation d'équiprobabilité. En distinguant les boules noires et blanches à l'aide d'une numéro $B_1, B_2, B_3$ et $N_1, N_2$, et en considérant l'univers $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}$, chaque issue devient équiprobable. On munit $\Omega$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_u$. L'événement "Tirer une boule blanche" correspond à l'événement $\{B_1, B_2, B_3\}$, et l'événement "Tirer une boule noire" correspond à l'événement $\{N_1, N_2\}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{B\}) = \mathbb{P}_u\left(\{B_1, B_2, B_3\}\right) = \frac{\text{Card }\{B_1, B_2, B_3\}}{\text{Card }\{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(\{N\}) = \mathbb{P}_u\left(\{N_1, N_2\}\right) = \frac{\text{Card }\{N_1, N_2\}}{\text{Card }\{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}} = \frac{2}{5}$$

3.4. **Propriétés.**

Toute probabilité vérifie les propriétés suivantes.

**Propriété 1.**
*Soit* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Alors :*
- $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
- $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *est une partition de l'événement* $A$ *:*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

**Démonstration.** On montre successivement les 5 propriétés :

• ? $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ?
$A$ et $\overline{A}$ forment un système complet d'événement : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Donc :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) \implies \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

• ? $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ ?

D'après la propriété précédente :

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\varnothing}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

• ? $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ ?

Si $A \subset B$, $A$ et $B \setminus A$ forment une partition de $B$ : $A \cup (B \setminus A) = B$ et $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

Or par définition $\mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$, donc $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

• ? $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ?

On a :

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \underset{A \cap (B \setminus A) = \varnothing}{\implies} \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \tag{1}$$

et

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \underset{(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing}{\implies} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \tag{2}$$

Ainsi de (1) et (2) découle :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \underset{(1)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \underset{(2)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

• Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'événement $A$ ; montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

*(I)* Pour $n = 1$, $A = A_1$ et $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) = \sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(A_i)$.

*(H)* Supposons l'assertion vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ une partition de $A$. Posons $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Ainsi $A_1, \ldots, A_n$ est une partition de $B$, donc par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Mais d'autre part : $A = (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1} = B \cup A_{n+1}$ et $B \cap A_{n+1} = \varnothing$ ; en effet :

$$\begin{aligned} B \cap A_{n+1} &= (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} \\ &= (A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \varnothing \cup \cdots \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Ainsi par définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \underset{HR}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

L'assertion reste vraie au rang $n+1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

### 3.5. Comment définir une probabilité ?

**Théorème 2.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ de cardinal $n$. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ une famille de $n$ réels positifs.*
*Pour qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right) = p_i,$$

*il faut et il suffit que :*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

*De plus, dans ce cas :*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right)$$

**Démonstration.** On montre deux implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\Omega$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right) = p_i$, alors puisque la famille d'événements élémentaires $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$ est une système complet d'événements :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

De plus $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a bien $\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ w_i \in A}} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right)$ (partition de $A$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ et définissons l'application $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i.$$

Puisque les $p_i$ sont tous positifs :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ainsi, cela définit l'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$. Montrons que c'est une probabilité sur $\Omega$. Il y a deux points à vérifier :

•
$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ \omega_i\in\Omega}} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

• Soient $A$ et $B$ deux événements incompatibles, *i.e.* $A \cap B = \varnothing$. Quitte à renuméroter les $\omega_i$, on peut supposer que :
$$A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q\} \quad \text{et} \quad B = \{\omega_{q+1}, \omega_{q+2}, \ldots, \omega_r\}$$
avec $(q, r) \in [\![0, n]\!]^2$ et $q \leqslant r$ ($A$ ou $B$ peut être vide). Alors :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ \omega_i\in A\cup B}} p_i = \sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{i=1}^{q} p_i + \sum_{i=q+1}^{r} p_i = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
Ainsi les deux point sont vérifiés : $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\Omega$. ■

**Exercice 5.** On lance un dé 6 pipé de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle à la valeur de la face.

a) Quel espace probabilisé est à considérer ?

b) Quelle est la probabilité que le résultat du lancer soit un nombre pair ?

**Résolution.**

**Exemple.**

On lance deux dés 6 non-pipés et l'on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus ; comme dans un exercice précédent. Mais cette fois on choisit comme univers $\Omega = [\![2, 12]\!]$. De quelle probabilité la munir ?

Notons les événement élémentaires $A_k = \{k\}$ pour tout $k \in \Omega$. On n'est pas en situation d'équiprobabilité puisque, comme déjà calculé plus haut, $\mathbb{P}(A_2) \neq \mathbb{P}(A_3)$.

Considérons l'univers $\Omega' = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme. Alors, dans cet univers :
$$A_k = \Big\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i + j = k\Big\}$$
Calculons son cardinal.

– Premier cas : si $k \in [\![2, 7,]\!]$ :
Alors $i, j$ varient simultanément de 1 à $k-1$ et de $k-1$ à 1, et donc Card $A_k = k-1$. (Voir aussi une exercice déjà traité du chapitre "Dénombrements"). Ainsi :

$$\mathbb{P}_u(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega'} = \frac{k-1}{36}$$

– Deuxième cas : si $k \in [\![8, 12,]\!]$ :
Dans ce cas $i, j$ varient simultanément de $k-6$ à 6 et de 6 à $k-6$, et donc Card $A_k = 6-(k-6)+1 = 13-k$. Ainsi :

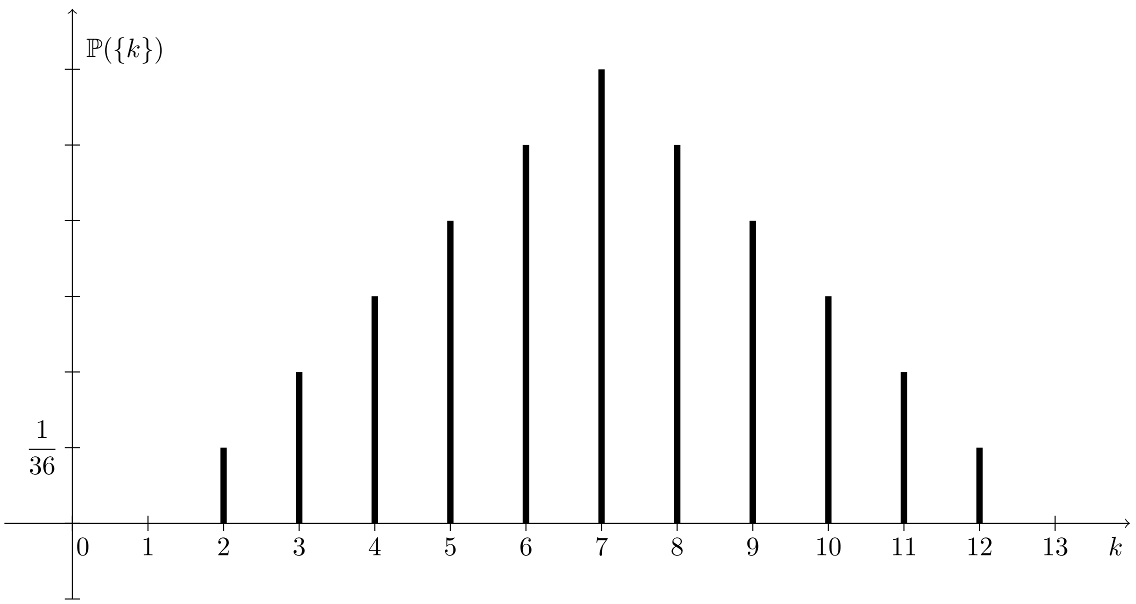
$$\mathbb{P}_u(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega'} = \frac{13-k}{36}.$$

Bien sûr, puisque $A_2$, $A_3$, $\ldots$, $A_{12}$ forment un système complet d'événements (le résultat ne peut être que 2, 3,. . . ,12), on a bien $\sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}_u(A_k) = 1$.

Ainsi, on doit munir $\Omega = [\![2, 12]\!]$ de la probabilité $\mathbb{P}$ définie par :

$$\forall k \in [\![2, 12]\!],\ \mathbb{P}\left(\{k\}\right) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{si } k \in [\![2, 7]\!] \\ \frac{13-k}{36} & \text{si } k \in [\![8, 12]\!] \end{cases}$$

Que l'on peut représenter graphiquement :




**Exercice 6.**
Lors d'un jeu, deux dés sont lancés, et on vous demande de miser sur la parité du résultat : la somme des dés est-elle paire ou impaire ?
Votre ami vous conseille de miser sur les pairs : "car entre 2 et 12 il y a plus de nombres pairs qu'impairs", dit-il.
Que lui répondez-vous ? Devriez-vous miser plutôt sur les pairs ou les impairs ?

**Résolution.**

## 4. Probabilités conditionnelles

### 4.1. Définition.

**Définition 8.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $A$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout événement $B \subset \Omega$, on appelle probabilité de $B$ sachant $A$, notée $\mathbb{P}(B/A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, le réel :*

$$\boxed{\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}}.$$

**Exemples.**
• On lance un dé 6 non pipé. Sachant que la face obtenue est paire, quelle est la probabilité que ce soit un 2 ? un 3 ?

Considérons l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme et les événements :
– $A$ : "le résultat est pair" ; $A = \{2, 4, 6\}$.
– $B$ : "le résultat est 2" ; $B = \{2\}$.
– $C$ : "le résultat est 3" ; $C = \{3\}$.

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{2\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$
$$\mathbb{P}(C/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0}{\frac{3}{6}} = 0.$$

La probabilité d'obtenir 2 sachant que le résultat est pair est $\frac{1}{3}$.
La probabilité d'obtenir 3 sachant que le résultat est pair est nulle.

• On considère une famille ayant 2 enfants. Sachant que l'un des enfants est une fille quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? (on suppose qu'à la naissance, chaque genre est équiprobable).
Soit $\Omega = \Big\{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\Big\}$ muni de la probabilité uniforme, et les événements :

– $A$ : "l'un des enfants est une fille",
– $B$ : l'un des enfants est un garçon".
On doit calculer $\mathbb{P}(B/A)$ :

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(G, F), (F, G)\})}{\mathbb{P}(\{(F, F), (G, F), (F, G)\})} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Sachant que l'un des deux enfants est une fille, la probabilité que l'autre soit un garçon est de $\frac{2}{3}$.

### 4.2. Propriétés.

**Proposition-Définition 9.** *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $A$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}(B/A) \end{array}$$

*est une probabilité sur $\Omega$, appelée probabilité conditionnée par $A$.*

**Démonstration.** Montrons d'abord que l'application est bien définie. Soit $B$ un événement quelconque. Puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est bien défini et positif. De plus

$$A \cap B \subset A \implies \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) \underset{\mathbb{P}(A)>0}{\implies} 0 \leqslant \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$$

ainsi $\mathbb{P}_A(B) \in [0,1]$ ; l'application $\mathbb{P}_A$ est bien définie.

Il faut maintenant montrer que c'est une probabilité ; il y a deux conditions à vérifier.

- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ ; or $A \subset \Omega \implies \Omega \cap A = A \implies \mathbb{P}_A(\Omega) = 1$.
- Soient $B$ et $C$ deux événements incompatibles : $B \cap C = \varnothing$.

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap (B \cup C)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Or $B$ et $C$ étant incompatibles, il en est de même de $A \cap B$ et $A \cap C$ :

$$B \cap C = \varnothing \implies (A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \frac{\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$$

Ainsi $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $\Omega$. ■

En particulier, toutes les propriétés vérifiées pour une probabilité, le sont aussi pour une probabilité conditionnée.

**Propriété 3.** *Sous les mêmes hypothèses :*

- $\forall B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
- $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$.
- $\forall (B, C) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $B \subset C \implies \mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$.
- $\forall (B, C) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$.
- *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ est une partition de l'événement $B$ :*

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) + \cdots + \mathbb{P}_A(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_A(B_i).$$

## 5. Formule des probabilités composées

Il découle immédiatement de la formule des probabilités conditionnelles la formule suivante qui permet le calcul de la probabilité de l'intersection de deux événements.

**Propriété 4. Formule de conditionnement.**
*Soit* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $A$ *et* $B$ *deux événements avec* $\mathbb{P}(A) \neq 0$. *Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B/A)}.$$

**Démonstration.** Sous ces hypothèses : $\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ dont on déduit $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B/A)$. ■

**Exercice 7.** Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche suivie d'une noire ?

**Résolution.**

**Remarque.** En général on applique cette formule dans l'ordre chronologique : on calcule la probabilité du premier événement $\mathbb{P}(A)$ puis on calcule la probabilité du deuxième événement conditionnée par le premier, $\mathbb{P}(B/A)$ directement en se plaçant dans la situation où $A$ est réalisé (on n'utilise pas la formule des probabilités conditionnées pour le calcul de $\mathbb{P}(B/A)$).

La formule de conditionnement se généralise pour le calcul de la probabilité de l'intersection de plusieurs événements. C'est la formule des probabilités composées :

**Théorème 5. Formule des probabilités composées.**
*Soit* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soient* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, *et des événements* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *tels que* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. *Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}.$$

**Démonstration.** Par récurrence sur $n \geqslant 2$.

*(I)* pour $n = 2$ c'est la formule de conditionnement.

*(H)* Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant 2$ fixé. Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$.

L'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ implique l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ car :

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n \quad \subset \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$$

et donc :

$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1});$$

en particulier $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

D'après la formule de conditionnement :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\
= \; & \mathbb{P}\left((A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}\right) \\
= \; & \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1}) \\
\underset{(HR)}{=} \; & \underbrace{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)} \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1})
\end{aligned}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$.

On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

**Exemple.** Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 1 blanche, 2 vertes et 3 rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer les boules dans l'ordre suivant : $BVRVRR$ ?

Notons $B_i$ (respectivement $V_i, R_i$) les événements : "la $i$-ème boule tirée est blanche (respectivement, verte, rouge)" ; $i \in \{1, 6\}$. On applique la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité de l'événement :

$$B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5 \cap R_6.$$

L'évènement $B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5$ est de probabilité non-nulle donc :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5 \cap R_6) \\
= & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(V_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2}(R_3) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2 \cap R_3}(V_4) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4}(R_5) \\
& \qquad \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5}(R_6) \\
= & \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \boxed{\frac{1}{60}}
\end{aligned}$$

**Remarque.** Autre méthode.

En numérotant les boules chaque issue est équiprobable et l'univers est l'ensemble des permutations de 6 éléments ; son cardinal est donc 6!.

Mais il y a $2! = 2$ issues où les vertes sont à la même position et $3! = 6$ issues où les rouges sont aux mêmes positions ; donc $2 \times 6$ issues donnant le résultat recherché.

Soit une probabilité de $\dfrac{2 \times 6}{6!} = \dfrac{2}{5!} = \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{60}$.

**Exercice 8.**
Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. on tire successivement et sans remise 4 boules dans l'urne. Á l'aide de la formule des probabilités composées, calculer la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 noires dans cet ordre.

**Résolution.**

**Remarque.** Autre méthode.
En numérotant les boules chaque issue est équiprobable. L'univers $\Omega$ est l'ensemble des 4-listes sans répétitions dans un ensemble de cardinal 7. Son cardinal est donc :

$$\text{Card }(\Omega) = \frac{7!}{(7-4)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4.$$

Les issues favorables sont constituées (d'un couple) d'une deux liste sans répétition parmi les 4 blanches, et d'une 2-liste sans répétition parmi les 3 noires ; donc

$$\frac{4!}{2!} \times \frac{3!}{1!} = (4 \times 3) \times (3 \times 2)$$

issues donnant le résultat recherché. La probabilité est donc :

$$\frac{4 \times 3 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{35}.$$

(C'est quand même plus simple d'appliquer la formule des probabilités composées...)

## 6. Formule des probabilités totales

Le calcul d'une probabilité nécessite souvent une partition de cas, que l'on avait coutume de schématiser dans le secondaire à l'aide d'un arbre. Le plus souvent, ça revient ce calcul sur un arbre revient à effectuer le calcul en partitionnant sur un système complet d'événement et à appliquer la formule des probabilités totales :

**Théorème 6. Formule des probabilités totales.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement $B$ :*

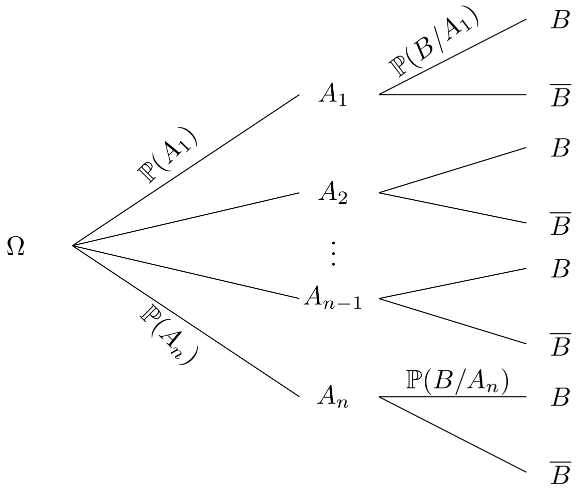
$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)}.$$

*Si de plus $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ :*

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)}.$$

**Remarque.** Schématisons à l'aide d'un arbre, la formule

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i) \ :$$




On veillera bien à perdre l'habitude du calcul à l'aide d'un arbre, au profit de cette formule ; sauf éventuellement lorsque le SCE contient entre 2 et 4 événements.

**Démonstration.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événement alors $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ est une partition de $B$ ; en effet :

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) = \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \Omega \cap B = B$$

$$i \neq j \implies (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap (B \cap B) = \varnothing \cap B = \varnothing.$$

par associativité et commutativité de $\cap$ et distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

Ainsi (cf. propriété 1) : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$.

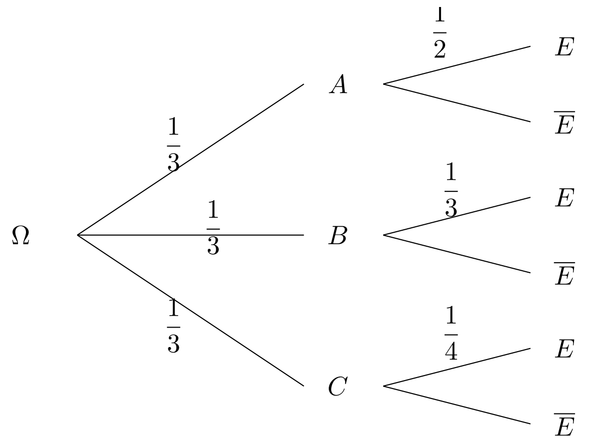
Si de plus pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors d'après la formule de conditionnement $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)$.

Ainsi : $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)$. ■

**Exemple.** 3 urnes $a, b, c$ contiennent des boules blanches et noires :
– $a$ contient 1 boule blanche et 1 noire,
– $b$ contient 1 boule blanche et 2 noires,
– $c$ contient 1 boule blanche et 3 noires.
On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Soit $A$ (respectivement $B, C$) l'événement : "on choisit l'urne $a$" (respectivement $b$,$c$) ; $A, B, C$ est un système complet d'événement. Soit $E$ l'événement "on tire une boule blanche". D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(E/A) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(E/B) + \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(E/C) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{6+4+3}{36} = \boxed{\frac{13}{36}}\end{aligned}$$



## 7. Formule de Bayes, ou de "probabilité des causes"

**Théorème 7. Formule de Bayes.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ une système complet d'événements tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Soit $B$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ ; alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :*

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}}$$

**Démonstration.** Soit $i \in [\![1, n]\!]$, par définition d'une probabilité conditionnée : $\mathbb{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)}$ et d'après la formule de conditionnement :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec pour SCE $A_1, A_2, \dots, A_n$ : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$, et donc :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

■

Un cas particulier récurrent est donné par :

**Corollaire 8.**
*Soient $A$ un événement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et $B$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A})}.$$

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le théorème avec pour SCE $A$, $\overline{A}$. ■

**Exercice 9.** Le quart d'une population a été vacciné contre la grippe. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades 1 vacciné pour 4 non-vaccinés.

(1) Le vaccin est-il efficace ?

(2) On sait en outre que parmi les vaccinés 1 personne sur 12 est malade. Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?

**Résolution.**

## 8. Indépendance

### 8.1. Événements indépendants.

**Définition 10.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On dit que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.*

**Exemple.** On lance un dé 6 non pipé ; on considère les deux événements :
– $A$ : "obtenir un chiffre pair",
– $B$ : "obtenir un chiffre $\geqslant 3$".
$A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

On calcule $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$ :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } \{2,4,6\}}{\text{Card } [\![1,6]\!]} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card } \{3,4,5,6\}}{\text{Card } [\![1,6]\!]} = \frac{2}{3} \quad ;$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Card } \{4,6\}}{\text{Card } [\![1,6]\!]} = \frac{1}{3} \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Oui les événements $A$ et $B$ sont indépendants.

### 8.2. Propriétés.

**Propriété 9.**
*Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $A$ et $B$ deux événements.*
- *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $A$ et $B$ sont indépendants $\iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*
- *Si $A$ et $B$ sont incompatibles et si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors $A$ et $B$ ne sont pas indépendants.*
- *$A$ et $\varnothing$ sont indépendants ; $A$ et $\Omega$ sont indépendants.*
- *Si $A$ et $B$ sont indépendants alors $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

**Démonstration.** On les démontre dans l'ordre.
• Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, d'après la formule de conditionnement $P(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$. Ainsi $A$ et $B$ sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ ssi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.

• Soient $A$ et $B$ incompatibles : $A \cap B = \varnothing \implies \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

• $A$ et $\varnothing$ sont indépendants : $\mathbb{P}(A \cap \varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 = \mathbb{P}(A) \times 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\varnothing)$.
$A$ et $\Omega$ sont indépendants : $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \times 1 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\Omega)$.

• Supposons que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ ; montrons que $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants.

$$B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Or $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles puisque $A$ et $\overline{A}$ le sont. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A)) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B)$$

Ainsi $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants.

Puisque $A$ et $B$ jouent le même rôle, par symétrie $A$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. Mais alors d'après ce que l'on vient d'établir $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi. ■

**Exemple.** On reprend l'exemple précédent :
– $A$ : "obtenir un chiffre pair",
– $B$ : "obtenir un chiffre $\geqslant 3$".

• Les événements $B$ et $C$ : "Obtenir un chiffre impair" sont ils indépendants ?
Oui, car $A$ et $B$ sont indépendants et $C = \overline{A}$.

• Les événements $A$ : "obtenir un chiffre pair" et $C$ : "obtenir un chiffre impair" sont-ils indépendants ?
Non, car ils sont incompatibles : $A \cap C = A \cap \overline{A} = \varnothing$ et de probabilités non nulles.

### 8.3. **Expériences indépendantes.**

**Définition 11.**
*Soient deux expériences $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ d'univers associés $\Omega_1$ et $\Omega_2$ munis respectivement des probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$.*
*L'expérience consistant à réaliser les deux expériences $\mathscr{E}_1$ suivi de $\mathscr{E}_2$ a pour univers associé $\Omega_1 \times \Omega_2$.*
*On dit que les expériences $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont indépendantes si $\Omega_1 \times \Omega_2$ peut être muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que ;*

$$\forall A \subset \Omega_1, \forall B \subset \Omega_2,\ \mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \times \mathbb{P}_2(B).$$

**Remarque.**

Autrement dit : $\forall A \subset \Omega_1, \forall B \subset \Omega_2$, les événements : $A \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times B$ sont indépendants dans $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2), \mathbb{P})$.

En effet :

$$\begin{aligned} A \times B &= \Big\{(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid a \in A, b \in B\Big\} \\ &= \Big\{(a,\omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid a \in A\Big\} \cap \Big\{(\omega,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid b \in B\Big\} \\ &= (A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B) \end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{P}(A \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(A) \quad ; \quad \mathbb{P}(\Omega_1 \times B) = \mathbb{P}_2(B).$$

Dans la pratique deux événements décrivants les issues de deux expériences indépendantes sont eux-mêmes indépendants.

**Remarque.** Deux expériences dont les issues de l'une n'influent pas sur l'autre sont implicitement considérés comme indépendantes ; exemples :
– on lance deux fois un dé 6 ; les deux lancers sont indépendants,
– on tire successivement et avec remise deux boules dans une même urne ; les deux tirages sont indépendants,
– on tire successivement et sans remise deux boules dans une même urne ; les deux

tirages ne sont pas indépendants : le contenu de l'urne a changé à la suite du premier tirage.

**Exemples.** On lance deux fois un dé 6 non pipé. Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6.

Les deux lancers sont indépendants ; soit $A$ l'événement : "le premier dé donne 6" et $B$ l'événement : "le deuxième dé donne 6". Les événements $A$ et $B$ sont indépendants, donc : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

### 8.4. **Indépendance mutuelle.**

**Définition 12.** *Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, A_2, \ldots A_n$ une famille d'événements. On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $I \subset [\![1, n]\!]$ :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

**Remarques.**

- Si les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants, il en est de même des événements $(A_i)_{i \in J}$ quelque soit $J \subset [\![1, n]\!]$.
- Les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont 2-à-2 indépendants si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, tels que $i \neq j$, $A_i$ et $A_j$ sont indépendants.

  Si les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants alors ils sont aussi 2 à 2 indépendants. La réciproque est fausse (voir exemple plus loin).

**Définition 13.**
*Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $n$ expériences aléatoires $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$ d'univers associés $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ munis respectivement des probabilités $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_n$.*
*L'expérience consistant à réaliser les $n$ expériences $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$ a pour univers associé $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.*
*On dit que les expériences $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$ sont indépendantes si $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ peut être muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que ;*

$$\forall A_1 \subset \Omega_1, \forall A_2 \subset \Omega_2, \ldots, \forall A_n \subset \Omega_n,\ \mathbb{P}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(A_i).$$

**Remarque.**

Autrement dit : $\forall A_1 \subset \Omega_1, \forall A_2 \subset \Omega_2, \ldots, \forall A_n \subset \Omega_n$, les événements :

$$A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$
$$\Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n$$
$$\vdots$$
$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n$$

sont mutuellement indépendants dans $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ muni de $\mathbb{P}$.

En effet :

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = (A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n) \cap (\Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n) \\ \cap \cdots \cap (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n) &= \mathbb{P}_1(A_1) \\ \mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n) &= \mathbb{P}_2(A_2) \\ &\vdots \\ \mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n) &= \mathbb{P}_n(A_n) \end{aligned}$$

Dans la pratique $n$ événements décrivants les issues de $n$ expériences indépendantes sont mutuellement indépendants.

**Exemple.** On tire successivement et avec remise $n$ boules dans une urne contenant une boule blanche et une boules noire. Quelle est la probabilité de ne tirer que des blanches ?

Soit $B_i$ l'événement : "la $i$-ième boule tirée est blanche". Les tirages se faisant avec remise ils sont indépendants. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

La probabilité de ne tirer que des boules blanches est $\dfrac{1}{2^n}$.

8.5. **Exemple.**

**Exercice 10.**

Pour une famille de deux enfants on considère les événements :
– $A$ : "la fratrie est mixte",
– $B$ : "l'ainé est une fille",
– $C$ : "le cadet est un garçon".

On suppose chaque genre à la naissance équiprobable et les naissances indépendantes.

(1) Montrer que les 3 événements $A$, $B$, $C$ sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.
(2) Montrer que $B$ et $C$ ne sont plus indépendants pour la probabilité conditionnée $\mathbb{P}_A$.

**Résolution.**

**Remarque.** La notion d'indépendance dépend de l'espace probabilisé considéré, et notamment de la probabilité dont l'univers est muni. Deux événements indépendants dans $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ne le sont plus nécessairement si l'on change $\mathbb{P}$, par exemple par $\mathbb{P}_A$.