Chapitre 1

Bases mathématiques : Logique, raisonnements, ensembles

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Ce chapitre donne le vocabulaire de notions de base en mathématiques : la logique, et les ensembles. Nous illustrerons notamment les différents types de raisonnement que l'on est en droit d'appliquer pour démontrer une assertion.

Aux concours ce chapitre ne peut pas constituer le thème principal d'un exercice d'écrit ou d'oral (cependant sa maîtrise est nécessaire pour tous les exercices d'écrit ou d'oral).

1. Éléments de logique des propositions

1.1. Proposition et assertion.

Définition 1.
Une proposition est un énoncé mathématique prenant une valeur de vérité : soit VRAI soit FAUX.

Exemples.
"2 est un nombre pair" est une proposition VRAIE.
"2 est un nombre impair" est une proposition FAUSSE.

Remarques.
– Une proposition vérifie le principe du tiers exclu : elle est soit VRAIE, soit FAUSSE ; l'un ou l'autre et jamais l'un et l'autre.
– Pour une proposition P, on a coutume d'écrire "P" plutôt que "P est VRAIE".

Définition 2.
Une assertion est un énoncé mathématique pouvant contenir des variables libres, chaque variable décrivant un ensemble donné, et qui pour chaque valeur de ses variables prend une valeur de vérité soit VRAI soit FAUX.
Une assertion ne contenant aucune variable libre est aussi une proposition ayant même valeur de vérité.
Plus généralement, une assertion est aussi une proposition dont la valeur de vérité est définie comme :
– VRAIE si l'assertion est vraie pour toute valeur de ses variables libres.
– FAUSSE sinon.

Remarque. Pour chaque valeur de ses variables libres, une assertion vérifie le principe du tiers exclu : elle est soit VRAIE soit FAUSSE

Exemples. Soit x un réel :
"$x \geqslant 0$" est une assertion ; elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et fausse pour tout $x \in \mathbb{R}_-$. C'est donc aussi une proposition FAUSSE.
"$x^2 \geqslant 0$" est une assertion toujours vraie. C'est donc aussi une proposition VRAIE.

Remarque. L'objet des mathématiques est d'établir quelles propositions sont vraies, et quelles propositions sont fausses. En ce sens les mathématiques ne s'intéressent qu'aux propositions. Les assertions ne servent qu'à la construction de propositions plus complexes.

Exercice 1. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont des assertions, des propositions, vraies, fausses ?
– Le frère de ma mère est mon oncle.
– Mon oncle est le frère de ma mère.
– André et Béa sont en couple.
– Aujourd'hui un élève de BCPST1 Fénelon est arrivé en retard.
– Les BCPST2 sont plus forts que les BCPST1.

Remarque. Pour être une assertion ou proposition, il ne doit pas y avoir d'ambiguïté ! Tous les termes doivent être bien définis.

Exemple. Le professeur de Mathématiques annonce : "La semaine prochaine vous aurez une interro surprise". Peut-on le croire ? Et sinon aidons notre professeur de Mathématiques à énoncer une proposition vraie.

Qu'est qu'une interro surprise ? Une interro à laquelle on ne s'attend pas lorsqu'elle survient ? Mais alors elle ne peut pas avoir lieu lors du derniers cours (sinon on pourrait s'y attendre juste avant). Ni non plus lors de l'avant dernier (sinon, sachant qu'elle n'aura pas lieu lors du dernier cours, on pourrait s'y attendre aussi juste avant), etc... jusqu'au premier cours. C'est donc impossible qu'il y ait une interro surprise –en ce sens– la semaine prochaine.
Si l'on suppose que c'est cela que signifie "interro surprise", alors la proposition énoncée par le professeur est fausse. Sinon on peut rétorquer que la phrase est ambigüe et nécessite de définir correctement ses termes.
Ce que veut dire le professeur c'est : "lors d'un cours de la semaine prochaine –je ne vous dit pas quand– vous aurez une interro".
Si le professeur voulait garder l'effet de surprise jusqu'au bout, il devrait plutôt annoncer : "La semaine prochaine vous aurez peut-être une interro surprise". Ce qui n'a pas tout à fait le même sens.

Définition 3.
Deux assertions sont équivalentes lorsqu'elles prennent même valeur de vérité pour chaque valeurs de leurs variables libres.
Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont même valeur de vérité.
Pour préciser que 2 assertions ou propositions P et Q sont équivalentes, on écrit :
$$P \equiv Q.$$

1.2. Les connecteurs logiques non, et , ou.

En partant d'assertions, on peut construire de nouvelles assertions à l'aide des connecteurs logiques non, et, ou.

1.2.1. *Le non logique (ou négation).*

Définition 4.
Soit P une assertion ; sa négation notée (non P) ou $\neg P$ est l'assertion prenant pour valeur de vérité :
$\neg P$ est VRAIE lorsque P est fausse,
$\neg P$ est FAUSSE lorsque P est vraie.
Autrement dit, sa table de vérité est :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples.
– Soit $n \in \mathbb{Z}$; la négation de l'assertion "n est pair" est équivalente à l'assertion "n est impair".
– Soient a et b deux entiers naturels ; la négation de l'assertion "a est multiple de b" est équivalente à l'assertion "le reste dans la division euclidienne de a par b est non nul".

Propriété 1. *Soit P une assertion ; on a l'équivalence :*

$$\neg(\neg P) \equiv P$$

Démonstration. Il suffit de comparer les tables de vérité de P et $\neg(\neg P)$, en appliquant deux fois la table de vérité du non logique :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

■

Exemples. Avec l'exemple précédent :
– Soit $n \in \mathbb{Z}$; la négation de l'assertion "n est impair" est équivalente à l'assertion "n est pair".
– Soient a et b deux entiers naturels ; la négation de l'assertion "le reste dans la division euclidienne de a par b est non nul" est équivalente à l'assertion "a est multiple de b".

Méthode. Soit P une assertion.
– Pour montrer que la proposition $\neg P$ est vraie il faut montrer que pour toutes valeurs de ses variables libres, l'assertion P est fausse.
– Pour montrer que la proposition $\neg P$ est fausse il faut montrer que pour au moins une valeur de ses variables libres, l'assertion P est vraie. (C'est un contre-exemple.)

1.2.2. *Le et logique (ou conjonction).*

Définition 5.
Soient P et Q deux assertions ; la conjontion P et Q (ou $P \wedge Q$) de P et Q est l'assertion

prenant pour valeur de vérité :
VRAIE lorsque les deux assertions P et Q sont vraies,
FAUSSE lorsque l'une des assertions P ou Q est fausse.
Autrement dit, sa table de vérité est :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple. Soit x un réel ; la conjonction des assertions "$x \geqslant 0$" et "$x \leqslant 0$" est équivalente à l'assertion "$x = 0$". La conjonction des assertions "$x \geqslant 0$" et "$x \leqslant 1$" est l'assertion "$0 \leqslant x \leqslant 1$".

Propriété 2. *Le et logique est commutatif et associatif ; soient P, Q et R trois assertions :*

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P \qquad \textit{commutativité}$$
$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \qquad \textit{associativité}$$

Remarque. L'associativité permet donc d'écrire $P \wedge Q \wedge R$ sans parenthèses.

Démonstration. Elles découlent facilement de la définition.
– Pour la commutativité :
L'assertion $P \wedge Q$ est VRAIE ssi les deux assertions P, Q sont VRAIES, ssi l'assertion $Q \wedge P$ est VRAIE ; d'où l'équivalence.
– Pour l'associativité :
L'assertion $P \wedge (Q \wedge R)$ est VRAIE ssi les deux assertions P, $Q \wedge R$ sont VRAIES, ssi les trois assertions, P, Q et R sont VRAIES. De même l'assertion $(P \wedge Q) \wedge R$ est VRAIE ssi les trois assertions P, Q et R sont VRAIES ; d'où l'équivalence. ■

Propriété 3. *Soient P et Q deux assertions :*

$$P \wedge P \equiv P$$
$$\textit{si } P \textit{ est VRAIE} \quad P \wedge Q \equiv Q$$
$$\textit{si } P \textit{ est FAUX} \quad P \wedge Q \textit{ est FAUX}$$

Démonstration. Comme la précédente propriété, elles découlent immédiatement de la définition. ■

Méthode. Soient P et Q deux assertions ; pour montrer que la proposition $P \wedge Q$ est VRAIE on établit que pour chaque valeur de leurs variables libres, chacune des assertions P et Q est vraie.
Pour montrer que la proposition $P \wedge Q$ est FAUSSE on montre que pour au moins une valeur de leurs variables libres, l'une des assertions P ou Q est fausse (contre-exemple).

1.2.3. *Le ou logique (ou disjonction).*

Définition 6.
Soient P et Q deux assertions ; la disjontion P ou Q (ou $P \vee Q$) de P et Q est l'assertion prenant pour valeur de vérité :

VRAIE lorsque au moins une des assertions P, Q est vraie,
FAUSSE lorsque les deux assertions P, Q sont fausses.
Autrement dit, sa table de vérité est :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple. Soit x un réel ; la disjonction des assertions "$x \geqslant 0$" et "$x \leqslant 0$" est VRAIE pour toute valeur de x.

Remarque. Le ou logique est inclusif : $P \vee Q$ est VRAIE notamment lorsque P et Q sont tous les 2 VRAIES.

Dans le langage courant, le ou n'est pas toujours inclusif ; il peut l'être :

"Ce soir j'irais volontiers au restaurant ou au cinéma".

Ou ne pas l'être :

"Au menu du restaurant, en 3ème plat : Fromage ou Dessert".

Dans ce cas le ou est dit exclusif.

En logique le ou exclusif de deux assertions P, Q est l'assertion :

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

Propriété 4. *Le ou logique est commutatif et associatif ; soient P, Q et R trois assertions :*

$$P \vee Q \equiv Q \vee P \qquad \textit{commutativité}$$

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \qquad \textit{associativité}$$

Remarque. L'associativité permet donc d'écrire $P \vee Q \vee R$ sans parenthèses.

Démonstration. Elles découlent facilement de la définition.

– Pour la commutativité :

L'assertion $P \vee Q$ est VRAIE ssi au moins une des deux assertions P, Q est VRAIE, ssi l'assertion $Q \vee P$ est VRAIE ; d'où l'équivalence.

– Pour l'associativité :

L'assertion $P \vee (Q \vee R)$ est VRAIE ssi au moins une des deux assertions P, $Q \vee R$ est VRAIE, ssi au moins une des trois assertions, P, Q et R est VRAIE. De même l'assertion $(P \vee Q) \vee R$ est VRAIE ssi au moins une des trois assertions P, Q et R sont VRAIES ; d'où l'équivalence. ∎

Propriété 5. *Soient P et Q deux assertions :*

$$P \vee P \equiv P$$

$$\textit{si } P \textit{ est FAUX} \quad P \vee Q \equiv Q$$

$$\textit{si } P \textit{ est VRAI} \quad P \vee Q \textit{ est VRAI}$$

Démonstration. Comme la précédente propriété, elles découlent immédiatement de la définition. ∎

Méthode. Soient P et Q deux assertions ; pour montrer que la proposition $P \vee Q$ est VRAIE : on suppose que P est FAUX pour une valeur des variables libres, et on montre qu'alors pour ces mêmes valeurs Q est VRAIE (ou l'inverse).

Pour montrer que la proposition $P \vee Q$ est FAUSSE on montre que pour au moins une valeur de leurs variables libres, les deux assertions P, Q sont fausses (contre-exemple).

1.2.4. *Propriétés.*

Dans cette partie, P, Q et R désignent 3 assertions.

Propriété 6.
Pour toutes valeurs de ses variables libres :

$P \vee \neg P$ *est VRAIE*

$P \wedge \neg P$ *est FAUSSE*

Démonstration. Cela découle immédiatement des définitions. ■

Propriété 7. *Lois de de Morgan*
La négation d'une conjonction est la disjonction des négations :

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

La négation d'une disjonction est la conjonction des négations :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Démonstration. Comparons leur table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

d'où l'équivalence $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

d'où l'équivalence $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$. ■

Propriété 8. *Distributivité de* $\wedge$ *sur* $\vee$ *et de* $\vee$ *sur* $\wedge$.

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Démonstration. Comparons leur table de vérité.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

D'où l'équivalence $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

D'où l'équivalence $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. ■

Exercice 2. Simplifier :

a) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

b) $\neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee (Q \wedge P)))$

a)

b)

1.3. L'implication $\Longrightarrow$.

1.3.1. *Définition de l'implication.*

Définition 7.
Soient P et Q deux assertions ; l'implication $\Longrightarrow$ est un connecteur logique défini par :

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$

et se lit "P implique Q".

Méthode. Pour montrer la proposition $P \Longrightarrow Q$:

On suppose que pour une valeur de ses variables libres, $\neg P$ est FAUX, et on montre que pour ces même valeurs Q est VRAIE.

Autrement dit : on suppose que pour une valeur de ses variables libres P est VRAI, et on montre qu'alors pour ces mêmes valeurs Q est VRAI.

Pour montrer que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est FAUSSE :

on montre que pour une valeur de ses variables libres, on a P sans avoir Q.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$; montrons que $x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$.

Supposons que $x = -1$; alors $x^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

Montrons que $x^2 = 1 \Longrightarrow x = -1$ est faux.

En prenant $x = 1$, on a bien $x^2 = 1 \times 1 = 1$ sans avoir $x = -1$.

Remarque. L'assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit aussi :

- Si P alors Q,
- P est une condition suffisante à Q,
- Pour avoir Q il suffit d'avoir P,
- Q est une condition nécessaire à P,
- Pour avoir P il est nécessaire d'avoir Q.

Exercice 3. Donner la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$.

1.3.2. *Négation d'une implication.*

Propriété 9. *La négation de l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est :*

$$\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

Remarque. L'implication $P \Longrightarrow Q$ est fausse dès que P est vraie sans que Q le soit.

Exercice 4. Soient a et b deux entiers naturels. On considère les deux assertions P et Q :

$$P \equiv (a \text{ divise } b) \implies (a^2 \text{ divise } b)$$
$$Q \equiv (a^2 \text{ divise } b) \implies (a \text{ divise } b)$$

a) Donner la négation de P et de Q.
b) Lesquelles des propositions P, Q, $\neg P$, $\neg Q$ sont-elles vraies ?

1.3.3. *Réciproque d'une implication ; équivalence.*

Définition 8. *La réciproque de l'assertion $P \implies Q$ est l'assertion $Q \implies P$.*

Remarque. On ne peut rien déduire de la valeur de vérité de $Q \implies P$ connaissant celle de $P \implies Q$.

Exemples : Soit x un nombre réel ;

$$\begin{array}{rll} & x = -1 \implies x^2 = 1 & \text{est VRAIE} \\ \text{sa réciproque} & x^2 = 1 \implies x = -1 & \text{est FAUSSE} \end{array}$$

Car pour $x = 1$ on a bien $x^2 = 1$ sans que $x = -1$.

$$\begin{array}{rll} & x = 0 \implies x^2 = 0 & \text{est VRAIE} \\ \text{sa réciproque} & x^2 = 0 \implies x = 0 & \text{est VRAIE} \end{array}$$

Par intégrité de la multiplication.

$$\begin{array}{rll} & x^2 \geqslant 0 \implies x \geqslant 0 & \text{est FAUSSE} \\ \text{sa réciproque} & x \geqslant 0 \implies x^2 \geqslant 0 & \text{est VRAIE} \end{array}$$

Car pour $x = -1$ on a $x^2 \geqslant 0$ et $x < 0$.

Définition 9.
Soient P et Q deux assertions, l'assertion $P \iff Q$ est définie par :
$$(P \iff Q) \equiv ((P \implies Q) \wedge (Q \implies P))$$
et se lit $\underline{P \text{ est équivalent à } Q}$.

Exercice 5. Donner la table de vérité de $(P \iff Q)$:

On en déduit :

Propriété 10.
La proposition $P \iff Q$ est vraie si et seulement si les deux assertions P et Q sont équivalentes ($P \equiv Q$).

1.3.4. *Contraposée d'une implication.*
On a par définition de l'implication :
$$\begin{aligned} P \implies Q &\equiv \neg P \vee Q \\ &\equiv Q \vee \neg P && \text{par commutativité du ou} \\ &\equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P && \text{d'après la propriété 1} \\ &\equiv (\neg Q) \implies (\neg P) && \text{par définition de } \implies \end{aligned}$$

Définition 10.
L'implication
$$(\neg Q) \implies (\neg P)$$
s'appelle la *<u>contraposée</u>* *de l'implication*
$$P \implies Q.$$
Elles ont même valeur de vérité.

Exemple. La contraposée de
$$x = -1 \implies x^2 = 1$$
est :
$$x^2 \neq 1 \implies x \neq -1.$$
Ce sont deux propositions vraies.

Exercice 6. Donner la contraposée de chacune des implications suivantes :
– Quand il pleut la route est mouillée.

– Un élève travaillant sérieusement son cours de maths aura la moyenne en maths.

– $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$

– $(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \implies x \leqslant z$

Méthode. Pour démontrer une implication $P \implies Q$, on peut soit montrer l'implication directe, en supposant P vraie et en établissant que Q est aussi vraie, soit montrer la contraposée en supposant que Q est faux et en établissant que P aussi est faux.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que n^2 pair $\implies n$ pair.

1.4. **Les quantificateurs ∀ et ∃.**

1.4.1. *Définition.*

Définition 11. *Soit $P(x)$ une assertion contenant $x \in E$ comme variable libre.*
L'assertion :
$$\forall x \in E, P(x)$$
signifie :
$$\text{Pour tout } x \text{ dans } E,\ P(x)$$
Le symbôle ∀ s'appelle le <u>quantificateur universel</u>.
L'assertion :
$$\exists x \in E, P(x)$$
signifie :
$$\text{Il existe } x \text{ dans } E,\ P(x)$$
Le symbôle ∃ s'appelle le <u>quantificateur existentiel</u>.
Dans les assertions, "$\forall x \in E, P(x)$" et "$\exists x \in E, P(x)$" la variable x n'est plus libre : elle est liée.

Remarque.
– La proposition $\forall x \in E, P(x)$ est vraie lorsque l'assertion $P(x)$ est vraie pour toute valeur de x. Elle a donc même valeur de vérité que la proposition $P(x)$.
– La proposition $\exists x \in E, P(x)$ est vraie lorsque pour une valeur $x = a \in E$, la proposition $P(a)$ est vraie.

Méthode.
– Pour prouver la proposition $\forall x \in E, P(x)$: on prend $x \in E$ <u>quelconque</u> et on montre que la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple : prouvons la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}, 1$ divise n.

Soit n un entier naturel quelconque ; alors $n = 1 \times n$, donc 1 divise n. Ainsi tout entier naturel est divisible par 1.

– Pour prouver la proposition $\exists x \in E, P(x)$: on peut exhiber une valeur de x pour laquelle $P(x)$ est vraie.

Exemple : prouvons la proposition : $\exists n \in \mathbb{N}, n$ divise 1.

Pour $n = 1$ on a bien 1 divise 1, puisque $1 = 1 \times 1$. Ainsi la proposition est vraie.

Exercice 8. Prouver la proposition suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leqslant 10^{-m}$$

Remarque. Attention, pour le quantificateur existentiel, il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ signifie qu'il existe au moins un $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est vraie.

Pour dire : "Il existe exactement un $x \in E$ tel que $P(x)$", on fait suivre le quantificateur existentiel d'un point d'exclamation :

Exemple : les deux propositions suivantes sont vraies :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a$$
$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists! x \in \mathbb{R}_+, x^2 = a$$

Pour la première il peut exister 2 valeurs de $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant l'assertion $x^2 = a$: $x = \pm\sqrt{a}$.

Pour la deuxième, il n'existe qu'une valeur de $x \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant l'assertion $x^2 = a$: $x = \sqrt{a}$.

Exercice 9. Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

a) f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

.

b) Le polynôme P admet au moins une racine réelle.

.

c) La fonction g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0, 1]$.

1.4.2. *Négation d'une proposition avec quantificateurs.*

Propriété 11.

Soit $P(x)$ une assertion contenant x comme variable libre.

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$$

Démonstration. L'assertion $\neg(\forall x \in E, P(x))$ est vraie lorsque l'assertion $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, c'est à dire lorsque pour au moins une valeur de x, l'assertion $\neg P(x)$ est vraie. D'où la première équivalence.

L'assertion $\neg(\exists x \in E, P(x))$ est vraie lorsque l'assertion $\exists x \in E, P(x)$ est fausse, c'est à dire lorsque pour aucune valeur de x, $P(x)$ n'est vraie, c'est à dire lorsque pour toute valeur de x, $\neg P(x)$ est vraie. D'où la deuxième équivalence. ■

Exemple. Les négations de :
– "Tous les élèves sont arrivés à l'heure ce matin", est :
"Un élève (au moins) est arrivé en retard".
– "Un élève (au moins) n'a pas eu la moyenne au DS", est :
"Tous les élèves ont eu la moyenne au DS".

Exercice 10. Donner la négation des propositions suivantes :
a) $\forall x \in E, \forall y \in F,\ x \leqslant y$

b) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$

c) $\forall x \in E,\ P(x) \implies Q(x)$

d) $(\forall x \in E,\ P(x)) \implies (\forall x \in E,\ Q(x))$

Méthode.
Pour montrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, on peut montrer que pour au moins une valeur de $x \in E$, la proposition $P(x)$ est fausse.
Pour montrer que la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est fausse, on peut montrer que pour toute valeur de x la proposition $P(x)$ est fausse.

1.4.3. *Ordre des quantificateurs.*

L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est important : les permuter donne un énoncé qui en général n'est pas équivalent.
Exemple :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*,\ xy = 1$$
est vrai : pour $x \in \mathbb{R}^*$ quelconque, il suffit de prendre $y = \frac{1}{x}$.
$$\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in R^*,\ xy = 1$$
est faux : en effet si pour $x \in \mathbb{R}^*$, $xy = 1$ alors par exemple $(2x)y = 2 \neq 1$ et $2x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi quelque soit $y \in \mathbb{R}^*$, l'assertion $\forall x \in R^*, xy = 1$ est fausse.

Par contre, en présence de quantificateurs tous de même type (existentiels ou universels) et placés en début d'assertion, on a le droit de permuter leur ordre :

Propriété 12.
$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ P(x,y)$$
$$\exists x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ P(x,y)$$

Démonstration. Pour la première, sa vérité équivaut à ce que pour toute valeur de $x \in E$ et de $y \in F$, $P(x,y)$ soit vraie.
Pour la seconde sa vérité équivaut à ce que pour au moins une valeur de $x \in E$ et de $y \in F$, $P(x,y)$ soit vraie.
Par commutativité du et logique, on a bien l'équivalence. ■

2. Méthodes de raisonnement

Dans cette partie nous passons en revue les différentes méthodes pour démontrer une proposition.

2.1. Quantifier universellement les variables libres.

Donnée une proposition, on peut commencer par ajouter un quantificateur universel pour chacune de ses variables libres. On obtient une proposition équivalente ne contenant aucune variable libre.

Comme deja remarqué :

Propriété 13.
Soit $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une proposition contenant les variables libres $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\dots$, $x_n \in E_n$. La proposition $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a même valeur de vérité que la proposition :

$$\forall\, x_1 \in E_1, \forall\, x_2 \in E_2, \dots, \forall\, x_n \in E_n,\ P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

qui ne contient, elle, plus aucune variable libre.

Remarque. Les quantificateurs sont en début de proposition ; leur ordre ne change rien à la valeur de vérité.

Cela clarifie la proposition, et permet d'éviter des erreurs en passant à la négation. Pour une proposition sans aucune variable libre, on a en effet :

Propriété 14.
Soit P une proposition sans aucune variable libre. Alors P et sa négation $\neg P$ ont des valeurs de vérité contraires. Autrement dit :

$$P \vee \neg P \qquad \textit{est VRAIE}$$

$$P \wedge \neg P \qquad \textit{est FAUSSE}$$

Démonstration. Lorsque P ne contient aucune variable libre, sa valeur de vérité est aussi celle en tant qu'assertion. Le résultat découle alors immédiatement de la propriété 6. ■

Exercice 11. Transformer les propositions suivantes en des propositions équivalentes ne contenant aucune variable libre.

a) Soit x, y deux réels ; $x < y \implies \exists a \in \mathbb{R},\ x < a < y$:

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{1}{n}\right| \leqslant \varepsilon$:

2.2. Preuve par l'absurde.

Soit P une proposition sans variable libre. Pour montrer P, on suppose sa négation $\neg P$ et on en déduit une contradiction, c'est à dire Q et $\neg Q$. L'hypothèse $\neg P$ est donc fausse, P est donc vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Alors $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme irréductible :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{avec } p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

Alors, en élevant au carré :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2$$

Donc p^2 est un entier pair. Mais puisque n^2 pair implies n pair (cf. preuve en exercice plus haut), p aussi est un nombre pair, disons, $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2 \implies q^2 = 2p'^2$$

Donc q^2 est pair, et donc q aussi est pair. Mais donc p et q ont 2 pour diviseur commun. Cela contredit le fait que p et q ont été choisis premiers entre eux. Contradiction.
Ainsi $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exemple. Montrons qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.
Par l'absurde : supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers, disons $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.
Notons $N = p_1p_2\cdots p_n + 1$. Alors $p_n < N$ et donc N n'est pas premier ; puisque $1 < N$, N est donc divisible par un nombre premier, $p_1, p_2, \ldots,$ ou p_n ; disons que N est divisible par p_k.
Puisque N et $p_1p_2\cdots p_n$ sont tous les deux divisibles par p_k :

$$1 = N - p_1p_2\cdots p_n \text{ est divisible par } p_k > 1$$

En effet, si $a = b + c$ et a et b sont divisibles par d alors $a - b = c$ est divisible par d.

Or 1 a pour seul diviseur dans $\mathbb{N}$ lui-même, et donc $p_k = 1$. Contradiction.
Ainsi il existe une infinité de nombres premiers.

2.3. **Comment prouver** $\forall x \in E, P(x)$.

• Le plus souvent, on prend $x \in E$ quelconque, et on prouve $P(x)$ pour cette valeur.
Exemple. Montrer que tout entier naturel est pair ou impair.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Effectuons la division euclidienne de n par 2 ; il existe donc $q \in \mathbb{N}$ et r valant 0 ou 1 tel que : $n = 2q + r$.
Si $r = 0$ alors $n = 2q$ et donc n est pair.
Si $r = 1$ alors $n = 2q + 1$ et donc n est impair.
Ainsi n est pair ou impair.

• On peut appliquer une disjonction de cas : si $E = E_1 \cup E_2$ on prouve séparément que $\forall x \in E_1, P(x)$ et $\forall x \in E_2, P(x)$.
C'est surtout le cas lorsque $P(x)$ contient des termes définis eux-mêmes par disjonction de cas, sur E_1 et sur E_2.
Exemple. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.
Rappelons que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

– Premier cas : si $x \geqslant 0$.
Alors x est un réel positif dont le carré vaut x^2, et par définition de la racine carrée $\sqrt{x^2} = x$. D'autre part, par définition de la valeur absolue, $|x| = x$.
Ainsi, lorsque $x \geqslant 0$: $\sqrt{x^2} = |x|$.
– Deuxième cas : si $x \leqslant 0$.
Alors $-x$ est un réel positif, et $(-x)^2 = x^2$; donc par définition de la racine carrée,

$\sqrt{x^2} = -x$. Et par définition de la valeur absolue $|x| = -x$.
Ainsi, lorsque $x \leqslant 0$: $\sqrt{x^2} = |x|$.
On en déduit que pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

• Plus rarement, on procède par l'absurde, en supposant que $\exists\, x \in E, \neg P(x)$ pour aboutir à une contradiction.

Exemple. Soit a un irrationnel. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \times a$ est aussi un irrationnel.
Par l'absurde : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \times a$ soit un rationnel. Alors $n \times a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. Mais alors en divisant par n :

$$a = \frac{p}{n \times q}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ et donc $n \times q \in \mathbb{Z}^*$. Donc a est un rationnel. Contradiction.

2.4. Comment prouver que $\exists\, x \in E, P(x)$.

• Souvent : on construit un $x \in E$ satisfaisant $P(x)$.

Exercice 12. Montrer que $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} < 2^{-1000}$.

Les propositions de la forme $\exists\, x \in E, P(x)$ sont souvent les plus difficiles à prouver : construire $x \in E$ vérifiant $P(x)$ demande parfois un peu d'imagination.

Exercice 13. Soient a et b deux nombres rationnels avec $a < b$. Montrer qu'il existe un rationnel c tel que $a < c < b$.

• Souvent : on applique un théorème important qui assure de l'existence de $x \in E$ vérifiant $P(x)$.

Exercice 14. Montrer que $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$.

• Plus rarement, on procède par l'absurde, en supposant que $\forall x \in E$, $\neg P(x)$, pour en déduire une contradiction.

Exemple. Dans une classe comportant au moins 4 élèves, l'élection d'un délégué est organisée de la façon suivante : chaque élève doit voter pour l'un de ses autres camarades. Montrer que deux élèves ont nécessairement obtenu le même nombre de voix.
Soit $N \geqslant 4$ le nombre d'élèves."

Procédons par l'absurde, en supposant que tous les élèves ont obtenu un nombre de voix différents. Donc soit :

$$V_1 < V_2 < V_3 < \cdots < V_N$$

leur nombre de voix respectifs. Le nombre total de voix étant égal au nombre de votants N, on a :

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N = N$$

Mais puisque les V_i sont des entiers positifs tous différents :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) \leqslant V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N = N$$

Or

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

(comme somme des N premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1). Ainsi :

$$\frac{N(N-1)}{2} \leqslant N \implies \frac{N-1}{2} \leqslant 1 \implies N-1 \leqslant 2 \implies N \leqslant 3$$

C'est impossible puisque $N \geqslant 4$.

On aboutit bien à une contradiction. Cela prouve la proposition.

2.5. **Comment montrer $\exists\,!\,x \in E,\ P(x)$.**

• On procède toujours en montrant séparément l'existence et l'unicité.

Pour établir l'unicité on se donne $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $P(x_1)$ et $P(x_2)$, et on en déduit que $x_1 = x_2$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(f(x)) = x \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad f(g(x)) = x \qquad (2)$$

2.6. **Comment montrer une implication $P \implies Q$.**

Il y a deux méthodes :

• Par raisonnement direct. On suppose P, et on en déduit Q.

• Par contraposée. On suppose $\neg Q$, et on en déduit $\neg P$.

Exercice 16.
a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$,
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$
b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$,
$$x \neq y \implies x^3 \neq y^3.$$

2.7. **Comment prouver une équivalence $P \iff Q$.**

• Raisonnement par équivalence. Lorsque c'est possible on part de P (respectivement Q) que l'on transforme successivement en des propositions équivalentes jusqu'à aboutir à Q (respectivement P).
$$P \iff P_1 \iff P_2 \iff \cdots \iff Q$$
Ce n'est pas toujours possible : on doit conserver l'équivalence à chaque étape ! Dans tous les autres cas :

• On montre séparément les deux implications $P \implies Q$ et sa réciproque $Q \implies P$ (par raisonnement direct ou par contraposée).

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

2.8. Raisonnement par analyse et synthèse.

Parfois, dans des exercices plus difficiles, on attend que l'on prouve une équivalence $P \iff Q$ mais en ne nous donnant que P et en attendant en plus que l'on détermine Q. Cela survient lorsque le problème consiste à déterminer tous les éléments d'un ensemble vérifiant certaines propriétés.

Par exemple : résoudre l'équation $x = \sqrt{2x-1}$ dans $\mathbb{R}$ revient à montrer l'équivalence entre les deux assertions ($x \in \mathbb{R}$ et $x = \sqrt{2x-1}$) et ($x = 1$).

S'il est possible de procéder par équivalence, c'est le plus simple. Sinon l'analogue d'un raisonnement par implication directe et par réciproque s'appelle un raisonnement par analyse et synthèse. Le principe est le suivant :

• Raisonnement par analyse et synthèse. On procède dans l'ordre :

– D'abord, dans la partie Analyse, on déduit de P des conditions nécessaires.

– Ensuite dans la partie Synthèse, on détermine quels éléments vérifiant ces conditions nécessaires, satisfont aussi P. Cela définit Q.

Lorsque l'analyse est menée suffisamment loin, Q sera équivalent aux conditions nécessaires obtenues durant l'analyse. Sinon on pourra toujours affiner ces conditions dans la partie synthèse pour obtenir Q.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{2x-1}$ par analyse et synthèse.

Exemple. Un peu plus difficile, un cas où le raisonnement par analyse et synthèse s'impose :

Déterminer toutes les fonction f définies et continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = [f(x)]^2 \qquad (*)$$

Analyse. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $(*)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \times (1 - f(x)) = 0 \implies \begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

D'autre part :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1).$$

En effet, sinon, il existerait $x_1 < x_2$ tel que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 1$ (ou l'inverse). Mais puisque f est continue, d'après le T.V.I., il existerait aussi $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$. Ce qui est impossible. Donc nécessairement f est la fonction réelle constante égale à 0 ou à 1.

Synthèse. Les fonctions réelles constantes égale à 0 ou à 1satisfont $(*)$, puisque si $f(x) = 0$ alors $f(x)^2 = 0$ et si $f(x) = 1$ alors $f(x)^2 = 1$. De plus elles sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi les réponses au problème sont les deux fonctions constantes égales à 0 ou 1.

2.9. **Preuve par récurrence.**

C'est une méthode de démonstration importante, mais qui ne s'applique qu'aux propositions portant sur des entiers.

2.9.1. *Principe de récurrence. Récurrence simple.*

Théorème 15. *Principe de récurrence.*
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
– $\mathscr{P}(n_0)$. (Initialisation), et
– Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. (Hérédité).
Alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. On se rappelle que l'ensemble des entiers naturels est le plus petit ensemble contenant 0 et contenant le successeur de chacun de ses éléments.
Notons $P(n - n_0) = \mathscr{P}(n)$. Alors $P(n) = \mathscr{P}(n + n_0)$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(n_0) \equiv &P(0), \text{ et} \\ &\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant n_0 \implies (\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)) \\ \equiv &\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 0 \implies (P(n) \implies P(n+1))\end{aligned}$$

Donc l'assertion $P(n)$ est vérifiée pour $n = 0$, et dès qu'elle est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi pour son successeur $(n+1)$. Elle est donc vérifiée pour tout entier naturel. Donc $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$. ■

Remarque. Le principe de récurrence reste vrai lorsque n et n_0 sont des entiers relatifs.

Méthode. Rédaction d'une récurrence :
" Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$.
Initialisation. $\mathscr{P}(n_0)$ car ...
Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
...
D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{P}(n)$. "

Exemple. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ est divisible par 9.
Montrons le par récurrence, en prenant pour assertion de récurrence :
$\mathscr{P}(n) \equiv 13^n - 4^n$ est divisible par 9.
Initialisation. $\mathscr{P}(0)$ est vraie var :

$$13^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0 \text{ est divisible par } 9$$

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}13^{n+1} - 4^{n+1} &= 13 \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= \underbrace{9 \times 13^n}_{\text{divisible par 9}} + \underbrace{4 \times (13^n - 4^n)}_{\text{divisible par 9 (HR)}}\end{aligned}$$

La somme de nombres divisibles par 9 étant aussi divisible par 9, $13^{n+1} - 4^{n+1}$ est divisible par 9. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ est divisible par 9.

Pour prouver certains résultats, il est pratique d'utiliser certaines variantes du principe de récurrence. Nous voyons ainsi dans les parties suivantes :

– La récurrence à deux pas.

– La récurrence forte.

2.9.2. *Récurrence à deux pas.*

Lorsqu'on a besoin des deux hypothèses $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ pour établir $\mathscr{P}(n+2)$, on formule de la façon suivante :

Propriété 16. *Récurrence à deux pas.*
– Si $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies, et
– Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ implique $\mathscr{P}(n+2)$
Alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Notons $P(n) \equiv (\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1))$. Sous ces hypothèses on a $P(n_0)$ et pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$. D'après le principe de récurrence $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, et donc $\mathscr{P}(n)$ aussi. ∎

Méthode. Rédaction d'une récurrence à deux pas :

" Montrons par récurrence à deux pas que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$.

Initialisation. $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies car ...

Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ et montrons $\mathscr{P}(n+2)$.

...

D'après le principe de récurrence à deux pas, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{P}(n)$. "

Exemple. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

On procède par une récurrence à deux pas avec pour assertion de récurrence :

– $\mathscr{P}(n) \equiv (u_n = 2^n)$.

Initialisation. On a :

$$u_0 = 1 = 2^0 \quad \text{donc } \mathscr{P}(0) \text{ est vraie}$$
$$u_1 = 2 = 2^1 \quad \text{donc } \mathscr{P}(1) \text{ est vraie}$$

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$; supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Ainsi $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n \\ &= 2^{n+1} + 2 \times 2^n \\ &= 2^{n+1} + 2^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence à deux pas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

2.9.3. *Récurrence forte.*

Lorsqu'on a besoin de $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ..., $\mathscr{P}(n)$ pour établir $\mathscr{P}(n+1)$, on peut appliquer le principe de récurrence forte :

Propriété 17. *Récurrence forte.*
– *Si* $\mathscr{P}(n_0)$ *est vraie, et*
– *si* $(\mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n)) \implies \mathscr{P}(n+1)$,
alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ *est vraie.*

Démonstration. Notons $P(n) \equiv \mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n)$. Sous ces hypothèses on a $P(n_0)$ et pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$. Donc d'après le principe de récurrence pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie. Il en est donc de même de $\mathscr{P}(n)$.■

Méthode. Rédaction d'une récurrence forte :

" Montrons par récurrence forte que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$.

Initialisation. $\mathscr{P}(n_0)$ car ...

Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ..., $\mathscr{P}(n)$ soient toutes vraies et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

...

D'après le principe de récurrence forte, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $\mathscr{P}(n)$. "

Exemple. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N},\ n = 2^k \times (2q+1)$$

(autrement dit, tout entier $\geqslant 1$ est produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.)

Prouvons-le par récurrence forte. Soit :

– $\mathscr{P}(n) \equiv (\exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N},\ n = 2^k \times (2q+1))$.

Initialisation. $\mathscr{P}(1)$ est vraie car $1 = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ (donc en prenant $k = q = 0$).

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour tout entier m entre 1 et n, $\mathscr{P}(m)$ soit vraie, et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Considérons 2 cas selon la parité de $n+1$:

Premier cas : si $n+1$ est impair. Alors il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $n+1 = 2q+1$ et donc

$$n + 1 = 2^0 \times (2q+1)$$

Dans ce cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie (en prenant $k = 0$).

Deuxième cas : si $n+1$ est pair. Alors $\frac{n+1}{2}$ est un entier et puisque $n \geqslant 1$, $1 \leqslant \frac{n+1}{2} < n+1$. Ainsi par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ est vraie :

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{2} &= 2^k \times (2q+1) \\ \Longrightarrow\ n+1 &= 2^{k+1} \times (2q+1) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par principe de récurrence forte, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2.9.4. *Quand utiliser une récurrence ?*
Toutes les conditions suivantes doivent être réunies :
– On démontre une proposition portant sur des entiers.
– La proposition à démontrer est donnée par l'énoncé.
– Pour établir $\mathscr{P}(n+1)$ il faut supposer $\mathscr{P}(m)$ vraie (avec $m \leqslant n$). (Sinon il faut effectuer une preuve sans récurrence.)

En général lorsque la proposition s'applique à des choses elles-mêmes définies par récurrence. Exemple : puissances a^n, suites définies par une relation de récurrence, etc...

Exemples.
– Récurrence simple ; cas fréquent :
Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$"expression de n".
– Récurrence double ; cas fréquent :
Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_1 = \cdots \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$"expression de n".
– Récurrence forte : lorsque pour établir $\mathscr{P}(n+1)$ on a besoin de $\mathscr{P}(m)$ pour $m < n+1$.
Lorsqu'une récurrence forte est nécessaire l'énoncé l'indiquera, souvent en stipulant :
"Montrer par récurrence en prenant pour assertion de récurrence :
$\mathscr{P}(n) \equiv (\forall m \in \mathbb{N}, n_0 \leqslant m \leqslant n \implies P(n))$. " On pourra alors soit procéder par récurrence simple avec l'assertion de récurrence $\mathscr{P}(n)$ donnée, soit par un récurrence forte sur l'assertion de récurrence $P(n)$.

3. Les ensembles

3.1. **Ensembles, sous-ensembles, éléments.**

Définition 12.
Soit E un ensemble, et x un élément de E ; on note $x \in E$ et on lit "x appartient à E".
Un ensemble est défini à partir de ses éléments : deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont mêmes éléments.
L'ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$ peut s'écrire à l'aide de ses éléments entre accolades (et dans n'importe quel ordre) :

$$\left\{a_1, a_2, \dots, a_n\right\}$$

Le singleton $\left\{a\right\}$ est l'ensemble contenant pour seul élément a.
L'ensemble ne contenant aucun élément est l'ensemble vide ; on le note $\varnothing$.

Remarques. $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des ensembles.
– $x \notin A$ est la négation de $x \in A$; il signifie x n'est pas un élément de A.
– $A \ni x$ est équivalent à $x \in A$ et se lit "A contient l'élément x".

Définition 13.
Si A et E sont deux ensembles, et si tout élément de A est aussi élément de E, autrement dit :

$$x \in A \implies x \in E$$

on dit que A est un sous-ensemble de E, ou une partie de E, ou que A est inclus dans E. On note :

$$A \subset E.$$

L'ensemble vide $\varnothing$ est inclus dans tout autre ensemble :

$$\varnothing \subset E$$

Remarque. $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Propriété 18.
Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$. (Transitivité).
$A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Démonstration. Découle immédiatement des définitions.

Méthode. Pour montrer que deux ensembles sont égaux : $A = B$:
Dans les cas simples on procède par équivalence en montrant que $x \in A \iff x \in B$.
Dans tous les autres cas on montre les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définition 14.
Si E est un ensemble, et si $P(x)$ est une assertion portant sur $x \in E$, alors :

$$A = \left\{x \in E \mid P(x)\right\}$$

est le sous-ensemble de E dont les éléments sont tous les éléments de E pour lesquels $P(x)$ est vraie.

Exemples.

$$\mathbb{R}_+ = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\right\} \qquad \mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q}\right\}.$$

– Si a et b sont deux réels, on note :

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\right\} \qquad [a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\right\}$$

$$]a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\right\} \qquad]a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\right\}$$

– Si $a \leqslant b$ sont deux entiers relatifs, on note :

$$[\![a,b]\!] = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\right\} = \{a, (a+1), \dots, (b-1), b\}$$

Définition 15. *Lorsque f est une fonction définie sur E, on peut aussi définir :*

$$\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$$

C'est l'ensemble des images par f des éléments de E.

On peut aussi définir certaines parties de $\mathbb{R}$ à l'aide des opérations usuelles :

Définition 16.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; alors :

$$aA = \left\{a \times z \mid z \in A\right\} \quad ; \quad a + A = \left\{a + z \mid z \in A\right\}$$

Exemple. En guise d'exemples très fréquents :

$$\pi\mathbb{Z} = \left\{k \times \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad ; \quad \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.2. **Ensemble des parties.**
L'ensemble des parties est une notion très importante, notamment en probabiltés.

Définition 17.
Soit E un ensemble ; $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E.

Remarque. $\mathscr{P}(E)$ n'est pas une partie de E ; il contient toujours $\varnothing$ et E comme éléments.

Il découle immédiatement :

Propriété 19.

$$A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E)$$

Exemples. $\mathscr{P}(\varnothing) = \left\{\varnothing\right\}$. Si $E = \{0,1\}$, alors :

$$\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\right\}$$

Remarque. Attention : $\left\{\varnothing\right\} \neq \varnothing$; en effet le premier contient un élément, le second aucun.

Exercice 19. Soit $E = \{0,1,2\}$; donner $\mathscr{P}(E)$.

3.3. **Opérateurs ensemblistes.**

3.3.1. *Complémentaire.*

Définition 18.
Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E est :

$$\complement_E(A) = \left\{x \in E \mid x \notin A\right\}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté on le note aussi $\overline{A}$.

Propriété 20.

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Démonstration. Soit $x \in E$; $x \in \overline{\overline{A}} \iff \neg(x \in \overline{A}) \iff \neg\neg(x \in A) \iff x \in A$. ■

Exercice 20. Montrer que $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

3.3.2. *Réunion.*

Définition 19.
Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. La réunion de A et B est l'ensemble :

$$A \cup B = \left\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\right\}$$

C'est une partie de E.

Propriété 21. *La réunion vérifie les propriétés suivantes :*
- $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité).*
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité).*
- $A \cup \varnothing = A$
- *Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.*
- *$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.*
- *$(A \subset C$ et $B \subset C) \implies A \cup B \subset C$.*

Démonstration. Elles découlent toutes des propriétés du ou logique. Par exemple la commutativité découle de la commutativité du ou :
$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B) \iff (x \in B) \vee (x \in A) \iff x \in B \cup A$.
L'associativité découle de l'associativité du ou. Toutes les autres s'obtiennent facilement à partir de la table de vérité du ou. ■

Exercice 21. Écrire plus simplement :

$$\pi\mathbb{Z} \cup 2\pi\mathbb{Z}$$

Définition 20.
Si A_1, A_2, ..., A_n sont des parties de E :
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\right\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
Plus généralement : soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ; alors :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\right\}$$

3.3.3. *Intersection.*

Définition 21.
Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. L'intersection de A et B est l'ensemble :
$$A \cap B = \left\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\right\}$$
C'est une partie de E, mais aussi de A et de B.

Propriété 22. *L'intersection vérifie les propriétés suivantes :*
- $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité).*
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(associativité).*
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- *Si* $A \subset B$ *alors* $A \cap B = A$.
- $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$.
- $(C \subset A$ *et* $C \subset B) \implies C \subset A \cap B$.

Démonstration. Elles découlent toutes des propriétés du et logique. Par exemple la commutativité découle de la commutativité du et :

$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B) \iff (x \in B) \wedge (x \in A) \iff x \in B \cap A.$

L'associativité découle de l'associativité du et. Toutes les autres s'obtiennent facilement à partir de la table de vérité du et. ∎

Exercice 22. Écrire plus simplement :
$$\pi\mathbb{Z} \cap 2\pi\mathbb{Z}$$

Définition 22.
Si A_1, A_2, ..., A_n sont des parties de E :
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\right\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
Plus généralement : soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ; alors :
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\right\}$$

3.3.4. *Propriétés des opérateurs ensemblistes.*

Propriété 23. *Distributivité*
- *de* $\cap$ *sur* $\cup$:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- *de* $\cup$ *sur* $\cap$:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Démonstration. Elles découlent de la distributivité du et sur le ou et du ou sur le et. Par exemple pour la première : Soit $x \in E$,
$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\ &\iff ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$
■

Propriété 24.
Soient A et B deux parties de E.
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Démonstration. Elles découlent des lois de de Morgan. Soit $x \in E$,
$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} \\ x \in \overline{A \cup B} &\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$
■

3.3.5. *Autres définitions.*

Définition 23.
Soient A et B deux parties de E ; on note :
$$A \smallsetminus B = \left\{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B \right\} = A \cap \complement_E B = A \cap \overline{B}$$
c'est une partie de E qui se lit A privé de B.

Exercice 23. Soit :
$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$
Écrire E sous la forme $A \smallsetminus B$; on ne demande pas de justifier.

Définition 24.
Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ des parties de E ; ils forment une partition de E si :
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$, *et*
- $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Exemple. Soit $A \subset E$; A et $\overline{A}$ forment toujours une partition de E :

$$A \cup \overline{A} = E \qquad ; \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

3.4. **Produit cartésien.**

C'est une construction d'ensemble à partir de 2 ou plusieurs ensembles, qui est très importante.

Définition 25.
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble :

$$E \times F = \Big\{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\Big\}$$

des couples d'éléments de E et de F.

Exemple.

$$[\![0, 1]\!] \times [\![1, 2]\!] = \Big\{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\Big\}$$

Remarque. Ce nom de produit cartésien provient du fait que depuis Descartes, on représente des points du plan à l'aide d'un repère orthonormé par des couples de réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 24. Donner tous les éléments de :

$$[\![1, 2]\!] \times \{0\}$$

$$[\![1, 2]\!] \times \{0, 3\}$$

$$[\![1, 2]\!] \times [\![0, 2]\!]$$

Plus généralement :

Définition 26.
Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles. Le produit cartésien de E_1, E_2, ..., E_n est :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\Big\}$$

Ses élément sont appelés des n-uplets.

Un cas particulier important survient lorsque $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$:

Définition 27.
Soit E un ensemble, et $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E\Big\}$$

Ses éléments sont appelés des n-listes d'éléments de E.

Exercice 25. Donner tous les éléments de :

$[\![0, 1]\!]^3$