Chapitre 22

Espaces vectoriels

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

1. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Définition 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathbb{K}^n$ désigne l'ensemble des n-listes d'éléments de $\mathbb{K}$.
- *Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont appelés des vecteurs.*
- *Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.*
- *$O_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ est appelé le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$.*

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est naturellement muni d'une opération $+$ c'est-à-dire d'une application $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ qui à un couple de vecteurs (u, v) associe le vecteur $u + v$:

Proposition-Définition 2. (Addition de $\mathbb{K}^n$)
L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est muni d'une opération nommée addition et notée $+$, définie pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{K}^n$ par :

$$\left.\begin{array}{l} u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{K}^n$$

L'addition de $\mathbb{K}^n$ a pour propriétés :
- $\forall (u, v, w) \in (\mathbb{K}^n)^3, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$ — *Associativité de $+$*
- $\forall (u, v) \in (\mathbb{K}^n)^2, \quad u + v = v + u$ — *Commutativité de $+$*
- $\forall u \in \mathbb{K}^n, \quad u + O_{K^n} = u$ — *O_{K^n} est l'élément neutre de $+$.*

Démonstration. Découle de la définition (addition terme à terme) et de l'associativité, de la commutativité, et de l'élément neutre 0 pour l'addition dans $\mathbb{K}$. Par exemple pour la commutativité :

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) && \text{par def. de + dans } \mathbb{K}^n \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) && \text{par commutativité de + dans } \mathbb{K} \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) + (u_1, u_2, \dots, u_n) && \text{par def. de + dans } \mathbb{K}^n \\ &= v + u \end{aligned}$$

■

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 1, 1)$, $u+v = (1-1, 2+1, 3+1) = (0, 3, 4)$.

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est aussi naturellement muni d'une loi externe, la multiplication par un scalaire, qui est une application : $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$:

Proposition-Définition 3. (Multiplication par un scalaire)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $u \in \mathbb{K}^n$ un vecteur ; on définit $\lambda \cdot u$ comme le vecteur :

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda \times u_1, \lambda \times u_2, \dots, \lambda \times u_n) \in \mathbb{K}^n.$$

La multiplication par un scalaire vérifie les propriétés :
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in \mathbb{K}^n, \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ *distributivité à droite.*
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in (\mathbb{K}^n)^2, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ *distributivité à gauche.*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$
- $\forall u \in \mathbb{K}^n, \quad 1 \cdot u = u$ *multiplier par 1 ne change pas le vecteur.*
- $\forall u \in \mathbb{K}^n, \quad 0 \cdot u = O_{\mathbb{K}^n}$ *multiplier par 0 annule le vecteur.*
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot O_{\mathbb{K}^n} = O_{\mathbb{K}^n}$ *le vecteur nul est absorbant.*
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda \cdot u = O_{\mathbb{K}^n} \iff \lambda = 0$ *ou* $u = O_{\mathbb{K}^n}$.

Démonstration. Comme précédemment toutes ces propriétés découlent de la définition et des propriétés des opérations $+$ et $\times$ dans $\mathbb{K}$; dans l'ordre :

– distributivité de $\times$ sur $+$ à droite ;

– distributivité de $\times$ sur $+$ à gauche ;

– associativité de $\times$;

– 1 est élément neutre de $\times$;

– 0 est absorbant (*i.e.* $\forall a \in \mathbb{K}, 0 \times a = 0$) ;

– 0 est absorbant (*i.e.* $\forall a \in \mathbb{K}, a \times 0 = 0$) ;

– intégrité de $\times$. ■

Exemple. Dans $\mathbb{C}^3$, si $u = (1, 2i, 3 + i)$ alors $i \cdot u = (i, -2, -1 + 3i) \in \mathbb{C}^3$.

Remarques.

• On a le droit de ne pas symboliser le point, en notant par exemple $2u$ au lieu de $2 \cdot u$. Noter $2 \times u$ est à éviter.

• Attention, le scalaire doit figurer <u>devant</u> le vecteur ; pour un vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ et un scalaire, 2 par exemple, les notations $u.2$ ou $u2$ ou $u \times 2$ sont toutes prohibées. Ceci pour appuyer qu'il s'agit d'une loi externe, et non d'une opération.

Définition 4. (l'espace vectoriel $(K^n, +, \cdot)$)
L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de l'opération $+$ et de la loi externe $\cdot$ est appelé un <u>$\mathbb{K}$-espace vectoriel</u>, ou lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, un <u>espace vectoriel</u>.

Exemple. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 5. (Combinaison linéaire de vecteurs)
Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$, tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ de la forme :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires.

Exemple. Dans $\mathbb{C}^2$, avec la famille de vecteurs :

$$u = (1, i) \quad ; \quad v = (0, 1) \quad ; \quad w = (1 + i, -2)$$

$\forall(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$,

$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w &= a \cdot (1,i) + b \cdot (0,1) + c \cdot (1+i,-2) \\ &= (a+c+ic, ai+b-2c) \end{aligned}$$

sont des combinaisons linéaires de u, v et w.

Remarque. On verra en deuxième année, que plus généralement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni des opérations + et $\cdot$ vérifiant toutes les propriétés énoncées ci-dessus. Par exemple :

– L'ensemble des matrices de type (p,q).
– L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (respectivement continues, dérivables, de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$).
– L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.
– L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré au plus n.
– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 2y + y = 0$.

Un espace vectoriel est une structure algébrique où la seule opération considérée est la combinaison linéaire. Si l'on dégage cette notion, c'est que de tels ensembles partagent des propriétés qui découlent de leur structure d'espace vectoriel.

Par exemple :

– Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des 3 vecteurs $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$:
$$(a,b,c) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (0,0,1).$$
– Une matrice de type $(2,2)$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des "vecteurs" $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
– Un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des "vecteurs" $1, X$ et X^2.
– Chaque solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^{2x}$.
– Chaque solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + y = 0$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cos et sin.

2. Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

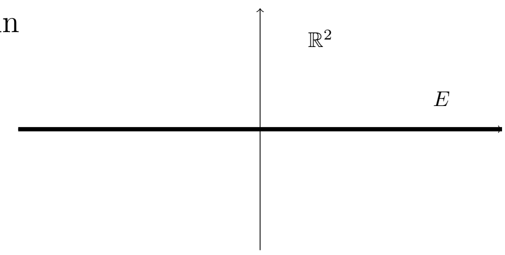
2.1. **Définition.**

Définition 6.
Une partie E de $\mathbb{K}^n$ est un <u>*sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$*</u> *si :*
– $O_{\mathbb{K}^n} \in E$ *(E contient le vecteur nul)*
– $\forall (u,v) \in E^2,\ u+v \in E$ *(E est stable pour l'addition)*
– $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E,\ \lambda \cdot u \in E$ *(E est stable pour la multiplication par un scalaire).*

Remarque. Les deux dernières conditions peuvent êtres remplacées par :

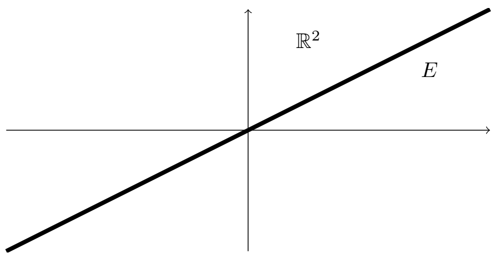
E est stable par combinaison linéaire :
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u,v) \in E^2,\ \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in E$$
et la première par : E est non-vide.

Exemples.
• $\left\{O_{\mathbb{K}^n}\right\}$ et $\mathbb{K}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.
– $\left\{O_{\mathbb{K}^n}\right\}$ est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{K}^n$, au sens de l'inclusion : Si E est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ alors $\left\{O_{\mathbb{K}^n}\right\} \subset E$.
– $\mathbb{K}^n$ est le plus grand s.e.v. de $\mathbb{K}^n$, au sens de l'inclusion : Si E est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ alors $E \subset K^n$.
• $E = \left\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$:



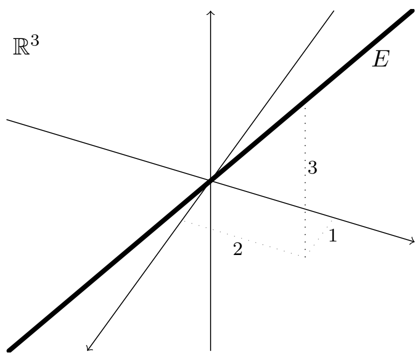
– $(0,0) \in E$ (prendre $x = 0$)
– $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (u,v) \in E^2$,
$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, u = (x,0), v = (y,0)$$
$$a \cdot u + b \cdot v = a \cdot (x,0) + b \cdot (y,0) = (ax+by, 0) \in E.$$

• $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\right\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$:



– $(0,0) \in E$ (car $0 = 2 \times 0$)
– $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (u,v) \in E^2$,
$$\exists (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, u = (2y_1, y_1), v = (2y_2, y_2)$$
$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a \cdot (2y_1, y_1) + b \cdot (2y_2, y_2) \\ &= (2(ay_1+by_2), ay_1+by_2) \in E. \end{aligned}$$

• $E = \left\{(x,2x,3x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 3x - z = 0\right\}$
est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:



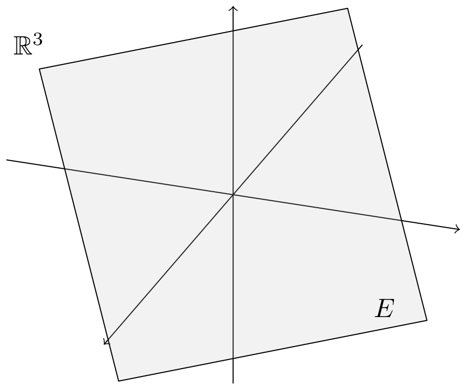
– $(0,0,0) \in E$ (prendre $x = 0$)
– $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (u,v) \in E^2$,
$$\exists (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, u = (x_1, 2x_1, 3x_1), v = (x_2, 2x_2, 3x_2)$$
$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a \cdot (x_1, 2x_1, 3x_1) + b \cdot (x_2, 2x_2, 3x_2) \\ &= (ax_1+bx_2, 2(ax_1+bx_2), 3(ax_1+bx_2)) \in E \end{aligned}$$

- $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\Big\}$
  est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

– $(0, 0, 0) \in E$ (car $0 + 0 + 0 = 0$)
– $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in E^2$,

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\text{avec } u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a \cdot (u_1, u_2, u_3) + b \cdot (v_1, v_2, v_3) \\ &= (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2, au_3 + bv_3) \in E \\ \text{car} \quad & au_1 + bv_1 + au_2 + bv_2 + au_3 + bv_3 \\ &= a \times \underbrace{(u_1 + u_2 + u_3)}_{=0} + b \times \underbrace{(v_1 + v_2 + v_3)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$



2.2. **Intersection de sous-espaces vectoriels.**

> **Théorème 1.**
> *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$*

Démonstration. Soient E et F deux s.e.v. de $\mathbb{K}^n$; montrons que $E \cap F$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

- $O_{\mathbb{K}^n} \in E$ et $O_{\mathbb{K}^n} \in F$ car E et F sont des s.e.v. ; donc $O_{\mathbb{K}^n} \in E \cap F$.

- Soient u, v deux vecteurs de $E \cap F$ et (a, b) deux scalaires.

$$\left.\begin{array}{ll} a \cdot u + b \cdot v \in E & \text{car } E \text{ s.e.v.} \\ a \cdot u + b \cdot v \in F & \text{car } F \text{ s.e.v.} \end{array}\right\} \implies a \cdot u + b \cdot v \in E \cap F$$

Ainsi $E \cap F$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. ■

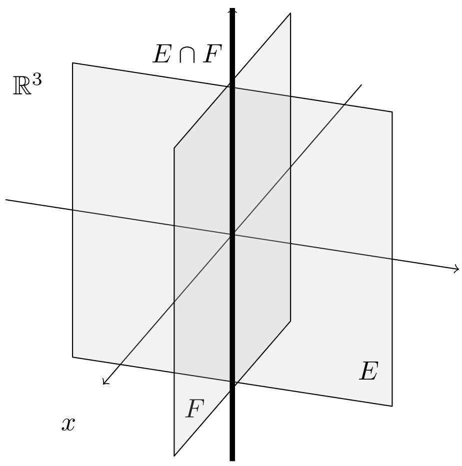
Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$; considérons :

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\Big\}$$
$$F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\Big\}$$

sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection :

$$E \cap F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\Big\}$$

est aussi un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

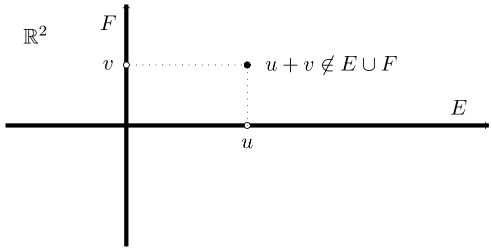


Remarque. Attention, en général, la réunion de deux s.e.v. n'est pas un s.e.v. La réunion n'est pas en général stable par $+$.

Exemple.

$$E = \Big\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\Big\}$$
$$F = \Big\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\Big\}$$

sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Mais $E \cup F$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$; par exemple $u = (2,0)$ et $v = (0,1)$ sont deux vecteurs de $E \cup F$ tandis que $u + v = (2,1) \notin E \cup F$.



2.3. **Sous-espace engendré par une famille de vecteurs.**

Proposition-Définition 7.
Soit $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \ldots u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, appelé le sous-espace engendré par $\mathscr{F}$; on le note $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *:*

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \Big\{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \mid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\Big\}.$$

Démonstration. Il faut montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

• $O_{\mathbb{K}^n} = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

• Soient :

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$
$$v = \mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2 + \cdots + \mu_p \cdot u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$; alors :

$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a\lambda_1 \cdot u_1 + a\lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + a\lambda_p \cdot u_p \\ &\quad + b\mu_1 \cdot u_1 + b\mu_2 \cdot u_2 + \cdots + b\mu_p \cdot u_p \\ &= \underbrace{(a\lambda_1 + b\mu_1)}_{\in\mathbb{K}} \cdot u_1 + \underbrace{(a\lambda_2 + b\mu_2)}_{\in\mathbb{K}} \cdot u_2 + \cdots + \underbrace{(a\lambda_p + b\mu_p)}_{\in\mathbb{K}} \cdot u_p \\ &\in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

■

Propriété 2.
Sous les mêmes hypothèses, $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.*

Démonstration. Si F est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ contenant tous les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$, alors par définition F contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$, autrement dit $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \subset F$. ■

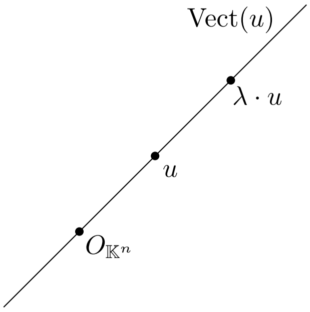
Exemples.

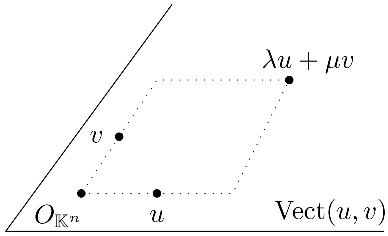
• Pour une famille vide ou restreinte au vecteur nul, $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \mathrm{Vect}(O_{\mathbb{K}^n}) = \big\{O_{\mathbb{K}^n}\big\}$.

• Pour une famille constituée d'un seul vecteur, non nul, u, $\mathrm{Vect}(u) = \big\{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{K}\big\}$; c'est la droite vectorielle engendrée par u.

• Pour une famille de deux vecteurs non colinéaires u et v (*i.e.* $\nexists k \in \mathbb{K}, u = k \cdot v$ ou $v = k \cdot u$), $\mathrm{Vect}(u,v) = \big\{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\big\}$ est le plan vectoriel engendré par u

et v.





Droite vectorielle Plan vectoriel

Remarque. Différentes représentations d'un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$:

On peut représenter un sous-espace-vectoriel de l'une des 3 manières suivantes. Il faut savoir passer d'une représentation à l'autre.

• À l'aide d'une ou plusieurs équation cartésiennes.
Une équation cartésienne est une équation linéaire, c'est à dire de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0$ d'inconnues $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et de paramètres $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
Exemple :

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y = z\right\}$$

• À l'aide d'une paramétrisation : ensemble des vecteurs dont les coordonnées sont des combinaisons linéaires d'un ou plusieurs paramètres décrivant $\mathbb{K}$.
Exemple :

$$E_2 = \left\{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{K}\right\}$$

• À l'aide d'une famille génératrice : l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille :

$$E_3 = \mathrm{Vect}((0, -1, 1))$$

Méthode pour passer d'une représentation à l'autre :

• Passage d'équations cartésiennes à une paramétrisation :

On pose un système linéaire constitué des équations cartésiennes, on choisit parmi les inconnues ce qui seront paramètres, et on exprime les autres inconnues en fonction de ces paramètres.

Exemple : $E_1 = E_2$; en effet :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in E_1 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -z \\ x - y = z \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} x + y = -z \\ 2x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \\ &\implies E_1 = \left\{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = E_2.\end{aligned}$$

• Passage d'une paramétrisation à une famille génératrice :

On décompose un vecteur du s.e.v. en une combinaison linéaire où les coefficient sont les paramètres et les vecteurs forment la famille génératrice ; il y a autant de vecteurs que de paramètres.

Exemple : $E_2 = E_3$; en effet soit $u \in \mathbb{R}^3$, alors $u \in E_2$ ssi $\exists z \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u = (0, -z, z) = z \cdot (0, -1, 1) \iff u \in \mathrm{Vect}((0, -1, 1)) = E_3$$

• Passage d'une famille génératrice à une paramétrisation :

Découle de la définition d'un espace engendré par une famille de vecteurs ; les paramètres sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple : Soit $u \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathrm{Vect}((0, -1, 1))$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u = \lambda \cdot (0, -1, 1) = (0, -\lambda, \lambda)$$

Ainsi $E_3 = \left\{(0, -\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

• Passage d'une famille génératrice à des équations cartésiennes.

Pour un vecteur quelconque de $\mathbb{K}^n$ appartenir au s.e.v. engendré par une famille de vecteurs équivaut à ce qu'il soit combinaison linéaire des vecteurs de la famille. Cela équivaut à la compatibilité d'un système, d'inconnues les coefficients de la combinaison linéaires, et de paramètres les composantes du vecteur. Les équations auxiliaires de ce système donnent les équations cartésiennes.

Exemple : $E_3 = E_1$; en effet : soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in E_3$ ssi il existe un scalaire a tel que :

$$(x, y, z) = a \cdot (0, -1, 1) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -a \\ z = a \end{cases} \iff \begin{cases} a = -y \\ a = z \\ 0 = x \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} a = -y \\ 0 = y + z \\ 0 = x \end{cases}$$

si et seulement si le système est compatible c'est à dire $x = 0$ et $y + z = 0$. On obtient les équations cartésiennes : $x = 0$ et $y + z = 0$. Or :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y + z = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y = z\right\} \\ &= E_1 \end{aligned}$$

• Passage d'une paramétrisation à des équations cartésiennes.

Le principe est le même ; on se ramène à la compatibilité d'une système, dont les équations auxiliaires donnent les équations cartésiennes.

Exemple $E_2 = E_1$; en effet, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors $(x, y, z) \in E_2$ si et seulement si :

$$\exists a \in \mathbb{R}, (x, y, z) = (0, -a, a) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -a \\ z = a \end{cases} \iff \begin{cases} a = -y \\ a = z \\ 0 = x \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} a = -y \\ 0 = y + z \\ 0 = x \end{cases}$$

• Remarquons que pour un s.e.v. il existe une infinité de représentations que ce soit à l'aide d'équations cartésiennes, d'une paramétrisation ou d'une famille génératrice.

Il est très facile de passer d'une paramétrisation à une famille génératrice et vice-versa. Il est plus délicat d'obtenir à partir d'une famille génératrice ou une paramétrisation les équations cartésiennes, et réciproquement.

Exercice 1. Vérifier que :

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une famille génératrice.

Résolution.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, exprimer $E = \text{Vect}((1,0,1);(0,1,0))$ à l'aide d'une équation cartésienne.

Résolution.

3. Familles libres et génératrices

3.1. Familles génératrices.

Définition 8.
Soit E un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$; on dit qu'une famille $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est génératrice de E si :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

Exemple. La famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$; $\forall u \in \mathbb{K}^n, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i.$$

En effet il suffit de prendre pour λ_i, la i-ème composante du vecteur u : $u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$; ainsi :

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

Propriété 3. *Tout famille de vecteurs de E qui contient une sous-famille génératrice de E est aussi une famille génératrice de E.*

Ainsi, à partir d'une famille génératrice de E, lui adjoindre des vecteurs de E produit une autre famille génératrice de E.

Démonstration. Soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et soit $q > p$ et $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset \{u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q\}$.

Puisque $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q)$ est un s.e.v. contenant les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$, d'après la propriété 2 :

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q)$$

Mais puisque $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q$ sont des vecteurs de E, qui est stable par combinaison linéaire :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q) \subset E$$

Ainsi : $E \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q) \subset E$ et donc :

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q) = E$$

■

3.2. Famille libre.

Définition 9.
Une famille $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est dite libre (ou encore linéairement indépendante) si :
$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = O_{\mathbb{K}^n} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Sinon elle est dite <u>liée</u> ; dans ce cas :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$
$$\text{tel que } \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = O_{\mathbb{K}^n}$$

Remarque. Pour exprimer le fait que la famille est liée, on énonce souvent :
" Il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, <u>non tous nuls</u>
tel que $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = O_{\mathbb{K}^n}$ "

Exemples.

• La famille $e_1 = (1, 0, \ldots 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre. En effet, supposons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = O_{\mathbb{K}^n} \\ \Longrightarrow\ & (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, \lambda_n) = O_{\mathbb{K}^n} \\ \Longrightarrow\ & (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = O_{\mathbb{K}^n} \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

• Une famille d'un seul vecteur u est libre si et seulement si $u \neq O_{\mathbb{K}^n}$; en effet :

$$\lambda \cdot u = O_{\mathbb{K}^n} \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = O_{\mathbb{K}^n}.$$

• Une famille de deux vecteurs colinéaires, $\{u, \lambda \cdot u\}$ est liée ; en effet :

– si $\lambda \neq 0$:

$$(-\lambda) \cdot u + 1 \cdot (\lambda \cdot u) = (-\lambda + \lambda) \cdot u = 0 \cdot u = O_{\mathbb{K}^n}.$$

– si $\lambda = 0$:

$$0 \cdot u + 1 \cdot (\lambda \cdot u) = 0 \cdot u + 1 \cdot O_{\mathbb{K}^n} = O_{\mathbb{K}^n} + O_{\mathbb{K}^n} = O_{\mathbb{K}^n}.$$

• La famille $\{u, v, u + v\}$ est liée ; en effet :

$$1 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot (u + v) = (1 - 1) \cdot u + (1 - 1) \cdot v = O_{\mathbb{K}^n} + O_{\mathbb{K}^n} = O_{\mathbb{K}^n}$$

Théorème 4.
Une famille de vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des $(p - 1)$ autres.

Démonstration. On montre deux implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons la famille liée ; alors il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = O_{\mathbb{K}^n}$$

Supposons sans perte de généralité que $\lambda_p \neq 0$; alors :

$$\begin{aligned} & \lambda_p \cdot u_p = -\lambda_1 \cdot u_1 - \lambda_2 \cdot u_2 - \cdots - \lambda_{p-1} \cdot u_{p-1} \\ \underset{\lambda_p \neq 0}{\Longrightarrow}\ & u_p = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_p}\right) \cdot u_1 + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_p}\right) \cdot u_2 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\right) \cdot u_{p-1} \end{aligned}$$

Ainsi u_p est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons sans perte de généralité que le vecteur u_p soit combinaison linéaire des $(p-1)$ autres :

$$\begin{aligned} u_p &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \cdot u_i \\ &\Longrightarrow \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_{p-1} \cdot u_{p-1} + (-1) \cdot u_p = O_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}, -1) \neq (0, 0, \ldots, 0, 0)$; ainsi la famille est liée. ■

Remarques. Applications :
• Une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul ; en effet le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs : $O_{\mathbb{K}^n} = \sum_{i=0}^{p-1} 0 \cdot u_i$.
• Une famille de deux vecteurs u, v est liée si seulement si les deux vecteurs sont colinéaires, *i.e.* $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda \cdot v$ ou $v = \lambda \cdot u$.
• Une famille contenant deux vecteurs colinéaires est liée : la famille $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$ avec $u_2 = \lambda \cdot u_1$ est liée ; en effet :

$$u_2 = \lambda \cdot u_1 + 0 \cdot u_3 + \cdots + 0 \cdot u_p.$$

• Attention, pour une famille d'au moins 3 vecteurs, être liée n'est pas équivalent à contenir deux vecteurs colinéaires.
Contre-exemple : $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = u + v = (1, 1)$ forme une famille liée de $\mathbb{K}^2$ tandis que ses vecteurs sont deux à deux non colinéaires.

Propriété 5.
• *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
• *Tous famille contenant une sous-famille liée est liée.*

Démonstration. Posons :

$$\mathscr{F} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset \{u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_q\} = \mathscr{G}$$

avec $0 < p < q$.

Commençons par montrer la deuxième assertion : $\mathscr{F}$ liée $\Longrightarrow$ $\mathscr{G}$ liée. Supposons $\mathscr{F}$ liée, alors d'après le théorème 4, un vecteur de $\mathscr{F}$, u_1 par exemple, est combinaison linéaire des $(p-1)$ autres :

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \\ u_1 &= \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p + 0 \cdot u_{p+1} + \cdots + 0 \cdot u_q \end{aligned}$$

et donc avec le théorème 4, $\mathscr{G}$ est une famille liée.
La première assertion s'obtient alors par contraposée de la seconde :

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ liée} &\Longrightarrow \mathscr{G} \text{ liée} \\ \mathscr{G} \text{ libre} &\Longrightarrow \mathscr{F} \text{ libre} \end{aligned}$$

■

4. Bases et dimension d'un s.e.v.

4.1. Définitions.

Définition 10.
Une <u>base</u> d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$ est une famille de vecteurs libre et génératrice de E.

Exemple. La famille $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$; elle est à la fois libre et génératrice.

La famille :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

s'appelle la <u>base canonique</u> de $\mathbb{K}^n$.

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 6.
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$; alors :
- *E admet des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même cardinal.*

Démonstration. Admis.

Définition 11.
On appelle <u>dimension</u> d'un s.e.v. E de $\mathbb{K}^n$, le nombre de vecteurs d'une base de E ; on la note $\dim(E)$.

Exemples.
- Par convention le s.e.v. $\{O_{\mathbb{K}^n}\}$ a pour base la famille vide. Sa dimension est 0.
- La dimension d'une droite vectorielle est 1. La dimension d'un plan vectoriel est 2.
- La dimension de $\mathbb{K}^n$ est $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

4.2. Familles génératrices et bases.

Théorème 7.
Soit E un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ de dimension p et soit $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E. Alors :
- *$\mathscr{F}$ contient une famille qui est une base de E.*
- *$\mathscr{F}$ possède au moins p vecteurs.*
- *Si $\mathscr{F}$ possède p vecteurs alors c'est une base de E.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $u \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ alors :

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q, u) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q).$$

En effet : $\text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q, u)$ d'après la propriété 2 et si $u = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \cdot e_i$:

$$\begin{aligned} v \in \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q, u) &\Longrightarrow v = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \cdot e_i + a \cdot u \\ &\Longrightarrow v = \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + a\mu_i) \cdot e_i \\ &\Longrightarrow v \in \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \end{aligned}$$

Donc $\text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q, u) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$.

Montrons maintenant la première propriété par récurrence sur le cardinal de $\mathscr{F}$.

(I). Si Card $\mathscr{F} = 0$; alors la famille est vide et $E = \left\{O_{\mathbb{K}^n}\right\}$. L'assertion est vraie par convention.

(H). Supposons l'assertion vraie pour tout famille de cardinal $q \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{F} = \left\{e_1, e_2, \ldots, e_{q+1}\right\}$ de cardinal $(q+1)$. Si $\mathscr{F}$ est libre alors c'est une base de E et l'assertion est vérifiée. Sinon, d'après le théorème 4 un de ses vecteurs, e_{q+1} par exemple est combinaison linéaire des q autres. Ainsi

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots e_{q+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots e_q)$$

Or par hypothèse de récurrence $\left\{e_1, e_2, \ldots e_q\right\}$ contient une base de E, donc il en est de même de $\left\{e_1, e_2, \ldots e_{q+1}\right\}$; l'assertion reste donc vraie au rang $q+1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence.

La deuxième propriété découle de la première : puisque $\mathscr{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E, et que $\dim(E) = p$, alors cette sous-famille est de cardinal p et donc $\mathscr{F}$ est de cardinal au moins p.

La troisième propriété découle aussi de la première : si $\mathscr{F}$ est de cardinal p, puisque possède une sous-famille base de E, et donc nécessairement de cardinal p, cette sous-famille est $\mathscr{F}$. Ainsi $\mathscr{F}$ est une base de E. ■

Exemples. Méthode : extraire une base d'une famille génératrice.

• Déterminer une base et la dimension de :

$$E = \text{Vect}((1,0), (0,-1), (1,1)).$$

On remarque que $(1,1) = (1,0) - (0,-1)$; la famille est donc liée et :

$$E = \text{Vect}((1,0), (0,-1))$$

Puisque $(1,0)$ et $(0,-1)$ est une famille de 2 vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre, et donc une base de E. Ainsi $\dim(E) = 2$.

• Déterminer une base et la dimension de :

$$E = \text{Vect}((1,0,1), (3,1,1), (1,-1,3)).$$

La famille est-elle libre ? Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que :

$$\begin{aligned}
& a \cdot (1,0,1) + b \cdot (3,1,1) + c \cdot (1,-1,3) = O_{\mathbb{K}^3} \\
\iff & (a+3b+c, b-c, a+b+3c) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} a+3b+c = 0 & (L_1) \\ a+b+3c = 0 & (L_2) \\ b-c=0 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \begin{cases} a+3b+c=0 \\ 2b-2c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+3b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

qui n'est pas de Cramer ; le système étant homogène il est compatible, il admet donc une infinité de triplets (a, b, c) solutions. Ainsi la famille n'est pas libre.

On a notamment comme solution le triplet $(-4, 1, 1)$ (poser $c = 1$ et résoudre le système obtenu). Ainsi :

$$\begin{aligned}
& -4 \cdot (1,0,1) + (3,1,1) + (1,-1,3) = O_{\mathbb{K}^3} \\
\implies & (1,-1,3) = 4 \cdot (1,0,1) - (3,1,1)
\end{aligned}$$

Ainsi : $E = \mathrm{Vect}((1,0,1),(3,1,1))$; montrons que $(1,0,1),(3,1,1)$ est libre : soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned}
& a \cdot (1,0,1) + b \cdot (3,1,1) = O_{\mathbb{K}^3} \\
\implies & (a+3b, b, a+b) = (0,0,0) \implies a = b = 0
\end{aligned}$$

Donc c'est une base et $\dim(E) = 2$.

4.3. **Familles libres et bases.**

Théorème 8.
Soit E un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ de dimension p, et soit $\mathscr{F}$ une famille libre de vecteurs de E. Alors :
- *$\mathscr{F}$ peut être complétée en une base de E.*
- *$\mathscr{F}$ possède au plus p vecteurs.*
- *Si $\mathscr{F}$ possède p vecteurs alors c'est une base de E.*

Démonstration. Commençons par montrer la deuxième propriété, en montrant qu'une famille d'au moins $(p+1)$ vecteurs dans un s.e.v. E de dimension p est nécessairement liée. Avec la propriété 5 il suffit de montrer que c'est le cas pour une famille de $(p+1)$ vecteurs.

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une base de E et $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ une famille de $(p+1)$ vecteurs de E ; alors pour tout $i \in [\![1, p+1]\!]$ il existe p scalaires $a_{1,i}, \dots, a_{p,i}$ tels que :

$$u_i = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} \cdot e_k \tag{$*$}$$

Montrons que $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ est liée.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \cdot u_i = O_{\mathbb{K}^n} \\
\iff & \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} a_{k,i} \cdot e_k \right) = O_{\mathbb{K}^n} && \text{avec } (*) \\
\iff & \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_{k,i} \right) \cdot e_k = O_{\mathbb{K}^n} && \text{interversion des } \sum \\
\iff & \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1} \times \lambda_1 & + \cdots & + a_{1,p+1} \times \lambda_{p+1} & = 0 \\ a_{2,1} \times \lambda_1 & + \cdots & + a_{2,p+1} \times \lambda_{p+1} & = 0 \\ & & & \vdots \\ a_{p,1} \times \lambda_1 & + \cdots & + a_{p,p+1} \times \lambda_{p+1} & = 0 \end{array} \right. && \text{car } e_1, e_2, \dots, e_p \text{ est libre}
\end{aligned}$$

C'est un système homogène de p équations linéaires à $(p+1)$ inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}$; il admet donc une infinité de solutions, et donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{p+1} \cdot u_{p+1} = O_{\mathbb{K}^n}$; la famille est donc liée.

Montrons maintenant la 1ère propriété. Pour cela commençons par remarquer que :

$$\{u_1, u_2, \dots, u_q\} \text{ libre et } u \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_q) \implies \{u_1, u_2, \dots, u_q, u\} \text{ libre.} \qquad (**)$$

En effet : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{q+1}) \in \mathbb{K}^{q+1}$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_q \cdot u_q + \lambda_{q+1} \cdot u = O_{\mathbb{K}^n}$$

Nécessairement $\lambda_{q+1} = 0$, car autrement on obtiendrait $u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_q)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_q \cdot u_q = O_{\mathbb{K}^n} \quad \text{et} \quad \lambda_{q+1} = 0 \\
\implies & \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_q = \lambda_{q+1} = 0 && \text{car } u_1, u_2, \dots, u_q \text{ est libre}
\end{aligned}$$

Revenons à la preuve de la 1ère propriété. Soit $u_1, u_2, \dots, u_q$ une famille libre dans E avec $\dim(E) = p$. D'après la deuxième propriété $q \leqslant p \implies p - q \geqslant 0$. Procédons par récurrence sur l'entier $(p - q)$.

(I) Si $p - q = 0$, c'est-à-dire $q = p$. S'il existait $u \in E \setminus \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_q)$ alors $\{u_1, u_2, \dots, u_q, u\}$ serait d'après $(**)$ une famille libre de $(p+1)$ vecteurs dans un s.e.v de dimension p. C'est impossible d'après la seconde propriété. Ainsi $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_q)$; la famille $u_1, u_2, \dots, u_q$ est donc libre et génératrice ; c'est une base de E.

(H) Soit $q \leqslant p$ fixé ; supposons que toute famille libre de q vecteurs de E peut être complétée en une base de E. Montrons que c'est le cas aussi d'une famille libre de $(q-1)$ vecteurs de E.

Considérons une famille libre de $(q-1)$ vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_{q-1}$ de E.

Si l'on avait $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{q-1})$ alors $u_1, u_2, \dots, u_{q-1}$ serait une base de E constituée de $q - 1 < p$ vecteurs ; c'est impossible d'après le théorème 6.

Donc il existe un vecteur $u \in E \setminus \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{q-1})$ et alors d'après $(**)$ la famille de q vecteurs de E : $u_1, u_2, \dots, u_{q-1}$ complétée par u, est libre.

Par hypothèse de récurrence cette famille peut être complétée en une base de E, et donc il en est de même de sa sous-famille $u_1, u_2, \dots, u_{q-1}$.

L'hypothèse de récurrence demeure donc vraie au rang $p - q + 1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence.

Pour finir, la 3ème propriété découle de la première : si $\mathscr{F}$ possède p vecteurs, étant libre elle peut être complétée en une base de E qui, puisque $\dim(E) = p$, possède aussi p vecteurs (théorème 6) ; c'est donc la même famille : $\mathscr{F}$ est une base de E. ∎

4.4. Inclusion de sous-espaces.

Théorème 9.
Soient E et F deux s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
- $E \subset F \implies \dim(E) \leqslant \dim(F)$.
- $E \subset F$ *et* $\dim(E) = \dim(F) \implies E = F$.

Démonstration. Soit $E \subset F$ et $\mathscr{B}$ une base de E.
Première propriété ; $\mathscr{B}$ est une famille libre de F, elle peut donc être complétée en une base $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$ de F (théorème 8) ; ainsi $\text{Card } \mathscr{B} \leqslant \text{Card } \mathscr{B}'$ et donc $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

Deuxième propriété ; si $\dim(E) = \dim(F)$, $\mathscr{B}$ est une famille libre de F de cardinal $\dim(F)$, donc (théorème 8) c'est une base de F : $E = \text{Vect}(\mathscr{B}) = F$. ∎

5. Coordonnées d'un vecteur dans une base

5.1. Définition.

Proposition-Définition 12.
Soient E un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une base de E. Alors :

$$\forall u \in E, \ \exists!(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_p \cdot e_p.$$

On dit que $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, c'est une famille génératrice, d'où l'existence de p scalaires $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que :

$$u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_p \cdot e_p.$$

Montrons l'unicité ; supposons que u s'écrive aussi :

$$u = x'_1 \cdot e_1 + x'_2 \cdot e_2 + \cdots + x'_p \cdot e_p.$$

Alors :

$$O_{\mathbb{K}^n} = u - u = (x_1 - x'_1) \cdot e_1 + (x_2 - x'_2) \cdot e_2 + \cdots + (x_p - x'_p) \cdot e_p$$

et puisque $\mathscr{B}$ est une famille libre :

$$\begin{cases} x_1 - x'_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ x_p - x'_p = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ \quad \vdots \\ x_p = x'_p \end{cases}$$

d'où l'unicité. ■

Remarque. Une base de E est une famille libre et génératrice :
– Que la famille soit génératrice assure que tout vecteur de E s'écrive comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.
– Que la famille soit libre assure que cette écriture soit unique.

Exemples.

- Le vecteur $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ a pour coordonnées dans la base canonique :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad ; \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0) \quad ; \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

ses composantes $x_1, x_2, \dots x_n$; en effet :

$$u = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n.$$

- Vérifier que $\mathscr{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées du vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans cette base.

C'est une famille de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2 ; il suffit donc de montrer que la famille est libre (théorème 8). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$a \cdot (1,1) + b \cdot (1,-1) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\iff (a + b, a - b) = (0, 0) \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre, puisqu'elle est de cardinal 2 dans un e.v. de dimension 2, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Déterminons les coordonnées de $u = (x, y)$ dans la base $\mathscr{B}$. Notons les u_1, u_2 :

$$(x, y) = u_1 \cdot (1, 1) + u_2 \cdot (1, -1) = (u_1 + u_2, u_1 - u_2)$$

$$\iff \begin{cases} u_1 + u_2 = x \\ u_1 - u_2 = y \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow (L_1+L_2)/2}{\iff} \begin{cases} u_1 + u_2 = x \\ u_1 = \frac{x+y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = \frac{x+y}{2} \\ u_2 = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2} \cdot (1, 1) + \frac{x-y}{2} \cdot (1, -1).$$

• (Prolongement de 2ème année.)

1) Montrer que $1, X, X^2$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$
2) Montrer que $1, X-1, (X-1)^2$ est aussi une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
3) Donner les coordonnées de $P = a + bX + cX^2$ dans chacune de ces bases.

1) La famille est génératrice puisque pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$, il existe des scalaires a, b, c, ses coefficients, tels que $P = a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2$. De plus la famille est libre : si

$$a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2 = O_{\mathbb{K}_2[X]}$$

puisque le vecteur nul de $\mathbb{K}_2[X]$ est le polynôme nul et que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et coefficients, nécessairement $a = b = c = 0$. Ainsi $1, X, X^2$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$. En particulier :

$$\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3.$$

2) Puisque la famille est constituée de 3 vecteurs dans un e.v. de dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre. Soient 3 scalaires a, b, c :

$$\begin{aligned} & a \cdot 1 + b \cdot (X-1) + c \cdot (X-1)^2 = O_{\mathbb{K}_2[X]} \\ \iff & a \cdot 1 + b \cdot (X-1) + c \cdot (X^2 - 2X + 1) = O_{\mathbb{K}_2[X]} \\ \iff & (a - b + c) \cdot 1 + (b - 2c) \cdot X + c \cdot X^2 = O_{\mathbb{K}_2[X]} \end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux ssi ils ont même degré et coefficients, donc :

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille est libre ; c'est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

3) Soit $P = a + bX + cX^2$; ses coefficients dans la base $1, X, X^2$ sont a, b, c. Déterminons ses coefficients α, β, γ dans la base $1, X-1, (X-1)^2$.

$$\begin{aligned} P = a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2 &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (X-1) + \gamma \cdot (X-1)^2 \\ &= (\alpha - \beta + \gamma) \cdot 1 + (\beta - 2\gamma) \cdot X + \gamma \cdot X^2 \quad \text{(comme ci-dessus)} \end{aligned}$$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement si ils on même degré et coefficients :

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = a \\ \beta - 2\gamma = b \\ \gamma = c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = a + b + c \\ \beta = b + 2c \\ \gamma = c \end{cases}$$

Ainsi :

$$P = a + bX + cX^2 = (a+b+c)\cdot 1 + (b+2c)\cdot(X-1) + c\cdot(X-1)^2.$$

ce qui donne ses coordonnées dans la base $1, (X-1), (X-1)^2$.

Par exemple :

$$1 + X + X^2 = 3 + 3\cdot(X-1) + (X-1)^2$$
$$1 - 2X + X^2 = 0 + 0\cdot(X-1) + 1\cdot(X-1)^2$$

5.2. **Représentation matricielle des coordonnées dans une base.**

Définition 13. *Soient E un s.e.v. de dimension p de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de E. Tout vecteur $u \in E$ admet des coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dans la base $\mathscr{B}$; on note :*

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

la matrice colonne de coordonnées de u dans $\mathscr{B}$.

Remarques.

• Attention la matrice dépend d'un ordre sur les vecteurs de la base ; changer d'ordre intervertit les coordonnées d'un vecteur ainsi que les lignes de sa matrice de coordonnées.

• La matrice colonne des coordonnées à pour nombre de lignes la dimension du sous-espace.

Propriété 10.
Avec les mêmes notations :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad Mat_{\mathscr{B}}(u+v) = Mat_{\mathscr{B}}(u) + Mat_{\mathscr{B}}(v)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad Mat_{\mathscr{B}}(\lambda\cdot u) = \lambda\cdot Mat_{\mathscr{B}}(u)$$

Démonstration. Immédiate ; il suffit d'exprimer les coordonnées de $u+v$ et de $\lambda\cdot u$ en fonction de celles de u et v. ∎

Définition 14.
Sous les mêmes hypothèses, si $u_1, u_2, \ldots, u_q$ est une famille de vecteurs de E, on note :

$$Mat_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots u_q) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,q} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{p,1} & u_{p,2} & \cdots & u_{p,q} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

C'est la matrice dont la j-ème colonne est la matrice des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. Si $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$:

$$Mat_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_q \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$$

5.3. Rang d'une famille de vecteurs.

Définition 15.
Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est la dimension du s.e.v. qu'elle engendre :

$$\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) = \dim\left(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q)\right)$$

Théorème 11.
Soit $u_1, u_2, \ldots, u_q$ une famille de q vecteurs dans un s.e.v. E de $\mathbb{K}^n$. Alors :
- $\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) \leqslant q$ *et* $\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) \leqslant \dim(E)$.
- $\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) = q \iff$ *la famille est libre.*
- $\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) = \dim(E) \iff$ *la famille est génératrice de E.*

Démonstration. Pour la 1ère. On a $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q) \subset E$ et donc (théorème 9) :

$$\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) = \dim \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q) \leqslant \dim(E)$$

D'après le théorème 7, la famille $u_1, u_2, \ldots, u_q$ contient une sous-famille qui est une base de $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q)$; son cardinal étant égal au rang de $u_1, u_2, \ldots, u_q$, on a $\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) \leqslant q$.

Pour la 2nde. D'après le théorème 7, $\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots, u_q) = q$ si et seulement si $u_1, u_2, \ldots, u_q$ est une base de $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q)$, si et seulement si c'est une famille libre.

Pour la 3ème. D'après le théorème 9, puisque $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q) \subset E$, le rang de $u_1, u_2, \ldots, u_q$ est égal à $\dim(E)$ si et seulement si $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_q) = E$, si et seulement si $u_1, u_2, \ldots, u_q$ est une famille génératrice de E. ■

La propriété suivante sera démontrée au Chapitre "Applications linéaires".

Propriété 12. *Soient $u_1, u_2, \ldots u_q$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$;*

$$\operatorname{rang}(u_1, u_2, \ldots u_q) = \operatorname{rang}\Big(Mat_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots u_q)\Big)$$

Démonstration. Cf. Chapitre "Applications linéaires".

Exemple. Déterminer si une famille est libre ou génératrice en calculant le rang d'une matrice.

Méthode : on considère la matrice des coordonnées de la famille de vecteurs dans une base quelconque, et on calcule le rang de cette matrice.

– La famille est libre ssi le rang est égal au nombre de vecteurs de la famille.

– La famille est génératrice ssi le rang est égal à la dimension du s.e.v.

Exercice 3. Montrer que $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (0, 0, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Résolution.