Chapitre 23

Applications linéaires

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p des entiers naturels non nuls.
On pose $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^p$, $O_E = O_{\mathbb{K}^n}$ et $O_F = O_{\mathbb{K}^p}$.

1. Applications linéaires

1.1. Définitions.

Définition 1.
Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si :
$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarques.
• Pour une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, nécessairement :

$$f(O_E) = O_F$$

en effet :

$$f(O_E) = f(0 \cdot O_E) = 0 \cdot f(O_E) = O_F.$$

• Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (u, v) \in E^2$:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad ; \qquad f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$$

en effet :

$$f(u + v) = f(1 \cdot u + 1 \cdot v) = 1 \cdot f(u) + 1 \cdot f(v) = f(u) + f(v)$$
$$f(\lambda \cdot u) = f(\lambda \cdot u + 0 \cdot O_E) = \lambda \cdot f(u) + 0 \cdot f(O_E) = \lambda \cdot f(u) + O_F = \lambda \cdot f(u).$$

• Par une récurrence immédiate, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont m scalaires et $u_1, \ldots, u_m$ sont m vecteurs de E, alors :

$$f\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f(u_i).$$

Exemples.
• $\mathscr{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \big\{x \longmapsto ax \mid a \in \mathbb{K}\big\}$.
En effet, si $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire, soit $a = f(1)$, alors $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$.
Réciproquement, si $f(x) = ax$ alors $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$

$$f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = a \times (\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot ax + \mu \cdot ay = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

Par exemple $f(x) = 3x$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, tandis que $g(x) = 3x+1$ et $h(x) = x^2$ ne sont pas linéaires.

• Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x-y+z) \end{array}$$

Montrons que f est linéaire :

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f(\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{X}, \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{Y}, \underbrace{\lambda z + \mu z'}_{Z}) \\
&= (\underbrace{\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z'}_{X+Y+Z}, \underbrace{2\lambda x + 2\mu x' - \lambda y - \mu y' + \lambda z + \mu z'}_{2X-Y+Z}) \\
&= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, 2\lambda x - \lambda y + \lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z', 2\mu x' - \mu y' + \mu z') \\
&= \lambda \cdot (x+y+z, 2x-y+z) + \mu \cdot (x'+y'+z', 2x'-y'+z') \\
&= \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)
\end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Remarque. Plus généralement :

Soit E un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^p$;
une application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant $\forall (u,v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

est dite linéaire, et on note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple. Soient $E = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'application :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x,0) & \longmapsto & (0,2x) \end{array}$$

est linéaire :

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot (x,0) + \mu \cdot (x',0)) &= f(\lambda x + \mu x', 0) \\
&= (0, 2\lambda x + 2\mu x') \\
&= \lambda \cdot (0,2x) + \mu \cdot (0,2x') \\
&= \lambda \cdot f(x,0) + \mu \cdot f(x',0)
\end{aligned}$$

Les applications linéaires admettent le vocabulaire suivant :

Définition 2.
- *Une application $f : E \longrightarrow F$ linéaire et bijective est un <u>isomorphisme de E vers F</u>.*
- *Une application $f : E \longrightarrow E$ linéaire est un <u>endomorphisme de E</u>.*
- *Une application $f : E \longrightarrow E$ linéaire et bijective est un <u>automorphisme de E</u>.*

Définition 3. *L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.*

Exemples.

• L'application identité de E :

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array}$$

est un automorphisme de E.

• L'application identiquement nulle de E :

$$O_{\mathscr{L}(E)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & O_E \end{array}$$

est un endomorphisme de E.

1.2. Propriétés.

On voit dans cette partie de quelles opérations sont munis $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$.

Propriété 1. (Addition)

$$f, g \in \mathscr{L}(E,F) \implies f+g \in \mathscr{L}(E,F)$$

Démonstration. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$;

$$f+g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u)+g(u) \end{array}$$

Montrons que $f+g$ est linéaire ; soient $(u,v) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) + g(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \\ &= \underbrace{\lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)}_{\text{car } f \in \mathscr{L}(E,F)} + \underbrace{\lambda \cdot g(u) + \mu \cdot g(v)}_{\text{car } g \in \mathscr{L}(E,F)} \\ &= \lambda \cdot (f(u)+g(u)) + \mu \cdot (f(v)+g(v)) \\ &= \lambda \cdot (f+g)(u) + \mu \cdot (f+g)(v)\end{aligned}$$

Donc $(f+g) \in \mathscr{L}(E,F)$. ■

L'addition de $\mathscr{L}(E,F)$ a les propriétés suivantes :

Propriété 2. (Propriétés de +)
L'addition de $\mathscr{L}(E,F)$ est :
– associative :

$$\forall (f,g,h) \in \mathscr{L}(E,F)^3, \quad (f+g)+h = f+(g+h)$$

– commutative :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2, \quad f+g = g+f$$

– a pour élément neutre l'application identiquement nulle de E dans F :

$$O_{\mathscr{L}(E,F)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & O_F \end{array}$$

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \quad f + O_{\mathscr{L}(E)} = f.$$

Démonstration. Les deux premières découlent de l'associativité et la commutativité de l'addition dans F :

$$\begin{aligned}\big((f+g)+h\big)(u) = (f+g)(u) + h(u) &= (f(u)+g(u)) + h(u) \\ &= f(u) + (g(u)+h(u)) = \big(f+(g+h)\big)(u) \\ (f+g)(u) &= f(u)+g(u) \\ &= g(u)+f(u) = (g+f)(u)\end{aligned}$$

La dernière découle de l'élément neutre O_F de l'addition dans F :

$$(f + O_{\mathscr{L}(E,F)})(u) = f(u) + O_{\mathscr{L}(E,F)}(u) = f(u) + O_F = f(u)$$

■

Propriété 3. (Loi externe)

$$f \in \mathscr{L}(E,F) \implies \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot f \in \mathscr{L}(E,F).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$;

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot f :\ E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \lambda \cdot f(u) \end{array}$$

Montrons que $\lambda \cdot f$ est linéaire ; soient $(u,v) \in E^2$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(a \cdot u + b \cdot v) &= \lambda \cdot f(a \cdot u + b \cdot v) \\ &= \lambda \cdot (a \cdot f(u) + b \cdot f(v)) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \\ &= a \cdot (\lambda \cdot f)(u) + b \cdot (\lambda \cdot f)(v) \end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot f \in \mathscr{L}(E,F)$. ■

La loi externe de $\mathscr{L}(E,F)$ a pour propriétés :

Propriété 4. (de $\cdot$ dans $\mathscr{L}(E,F)$)
$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall f \in \mathscr{L}(E,F), \quad (\alpha+\beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f.$
$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2, \quad \alpha \cdot (f+g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g.$
$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall f \in \mathscr{L}(E,F), \quad \alpha \cdot (\beta \cdot f) = (\alpha \times \beta) \cdot f.$

Démonstration. Elles découlent toutes de la définition et de la structure d'espace vectoriel de F ; par exemple pour la première ; soit $u \in E$ quelconque :

$$((\alpha+\beta) \cdot f)(u) = (\alpha+\beta) \cdot f(u) \underset{F\ \mathbb{K}\text{-ev}}{=} \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(u) = (\alpha \cdot f)(u) + (\beta \cdot f)(u)$$

donc $(\alpha+\beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$. ■

Remarque. Ainsi $\mathscr{L}(E,F)$ muni de $+$ et $\cdot$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La composée de deux applications linéaires est linéaire :

Propriété 5. (Composition)
Soient $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^p$, $G = \mathbb{K}^q$;

$$f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathscr{L}(F,G) \implies g \circ f \in \mathscr{L}(E,G).$$

Démonstration. L'application $g \circ f$ est bien définie :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & G \\ u & \longmapsto & g(f(u)) \end{array}$$

montrons qu'elle est linéaire ; soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned}
g \circ f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= g\,(f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)) \\
&= g\,(\lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E, F) \\
&= \lambda \cdot g(f(u)) + \mu \cdot g(f(v)) && \text{car } g \in \mathscr{L}(F, G) \\
&= \lambda \cdot g \circ f(u) + \mu \cdot g \circ f(v)
\end{aligned}$$

donc $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$. ■

La composition a les propriétés suivantes :

Propriété 6. (de la composition)
Sous les mêmes hypothèses :
– $\forall f \in \mathscr{L}(E, F), \forall g \in \mathscr{L}(F, G)$,
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad g \circ (\lambda \cdot f) = (\lambda \cdot g) \circ f = \lambda \cdot (g \circ f)$$
– $\forall (f_1, f_2) \in \mathscr{L}(E, F)^2, \forall g \in \mathscr{L}(F, G)$,
$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$
– $\forall f \in \mathscr{L}(E, F), \forall (g_1, g_2) \in \mathscr{L}(F, G)$,
$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

Démonstration. Toutes découlent des définitions et de la linéarité des applications ; par exemple pour la première, soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconques :

$$g \circ (\lambda \cdot f)(u) \underset{def.}{=} g((\lambda f)(u)) \underset{def.}{=} g\big(\lambda \cdot f(u)\big) \underset{g \in \mathscr{L}(F,G)}{=} \lambda \cdot g(f(u)) \underset{def.}{=} \lambda \cdot g \circ f(u)$$

donc $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f)$, et

$$\lambda \cdot g \circ f(u) \underset{def.}{=} \lambda \cdot g(f(u)) \underset{def.}{=} (\lambda \cdot g)(f(u)) \underset{def.}{=} (\lambda \cdot g) \circ f(u)$$

donc $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f$. ■

La composition est une opération bien définie dans $\mathscr{L}(E)$:

Propriété 7. (de $\circ$ dans $\mathscr{L}(E)$)
Si f est un endomorphisme de E alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'application :
$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$
est bien définie ; c'est un endomorphisme de E.

Démonstration. S'obtient par une récurrence immédiate sur n en appliquant la propriété 15. ■

Remarque. L'ensemble $\mathscr{L}(E)$ peut être muni des opérations $+$ et $\circ$ et de la loi externe. Muni de ces opérations $(\mathscr{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est appelé l'algèbre des endomorphismes de E.

Pour finir, l'application réciproque d'un isomorphisme est lui-même un isomorphisme :

Propriété 8. (Application réciproque d'un isomorphisme)
Si f est un isomorphisme de E vers F alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application bijective ; alors l'application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est bien définie ; montrons qu'elle est linéaire.
Soient $(u,v) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\lambda \cdot u + \mu \cdot v\Big) &= f^{-1}\Big(\lambda \cdot f(f^{-1}(u)) + \mu \cdot f(f^{-1}(v))\Big) && \text{car } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \\ &= f^{-1}\Big(f\left(\lambda \cdot f^{-1}(u) + \mu \cdot f^{-1}(v)\right)\Big) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \\ &= \lambda \cdot f^{-1}(u) + \mu \cdot f^{-1}(v) && \text{car } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

donc $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. ■

2. Noyau et image d'une application linéaire

2.1. Noyau et image de $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Définition 4.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit :
- *son noyau :*

$$\ker f = \Big\{u \in E \mid f(u) = O_F\Big\}$$

- *son image :*

$$\mathrm{Im} f = \Big\{f(u) \mid u \in E\Big\} = \Big\{v \in F \mid \exists u \in E, v = f(u)\Big\} = f(E)$$

Noyau et image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels de E et F :

Théorème 9.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors :
- $\ker f$ *est un s.e.v. de E.*
- $\mathrm{Im} f$ *est un s.e.v. de F.*

Démonstration.
• Pour $\ker f$: montrons que c'est un s.e.v. de E :
$O_E \in \ker f$ car $f(O_E) = O_F$ puisque f est linéaire.
Soient $(u,v) \in (\ker f)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \\ &= \lambda \cdot O_F + \mu \cdot O_F && \text{car } u,v \in \ker f \\ &= O_F \end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \ker f$. Ainsi $\ker f$ est un s.e.v. de E.

• Pour $\mathrm{Im} f$: montrons que c'est un s.e.v. de F :
Puisque f est linéaire : $f(O_E) = O_F$; donc $O_F \in \mathrm{Im} f$.
Soient $(u,v) \in (\mathrm{Im} f)^2$, $u = f(u_0)$ et $v = f(v_0)$, et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + \mu \cdot v &= \lambda \cdot f(u_0) + \mu \cdot f(v_0) \\ &= f(\lambda \cdot u_0 + \mu \cdot v_0) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathrm{Im} f$. Ainsi $\mathrm{Im} f$ est s.e.v. de F. ∎

Exemples.
• Montrer que :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (2x, -3x) \end{array}$$

est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.
Montrons que f est linéaire : soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= (2\lambda \cdot x + 2\mu \cdot y, -3\lambda \cdot x - 3\mu \cdot y) \\ &= \lambda \cdot (2x, -3x) + \mu \cdot (2y, -3y) \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y) \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Déterminons $\ker f$: $x \in \ker f$ ssi
$$f(x) = (2x, -3x) = (0,0) \iff x = 0.$$
Ainsi :
$$\boxed{\ker f = \{0_{\mathbb{R}}\} = \{0\}}.$$
Déterminons $\mathrm{Im} f$: soit $u \in \mathbb{R}^2$; $u \in \mathrm{Im} f$ ssi $\exists x \in \mathbb{R}$,
$$u = f(x) = (2x, -3x) = x \cdot (2, -3) \iff u \in \mathrm{Vect}((2, -3)).$$
Ainsi :
$$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((2, -3))}.$$

• Soit l'application linéaire (cf. page 1)
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x-y+z) \end{array}$$
Déterminer une base de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ et leur dimension.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; $u \in \ker f$ ssi
$$\begin{aligned} f(x,y,z) = O_{\mathbb{R}^2} &\iff (x+y+z, 2x-y+z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad -3y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -3y \end{cases} \end{aligned}$$
Ainsi $u \in \ker f$ si et seulement si $\exists y \in \mathbb{R}$, $u = (2y, y, -3y) = y \cdot (2, 1, -3)$. Ainsi :
$$\ker f = \mathrm{Vect}((2,1,-3)).$$
La famille constituée du seul vecteur (non nul !) $(2,1,-3)$ est une base de $\ker f$:
$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \{(2,1,-3)\} \quad \text{est une base de } \ker f \quad ; \quad \dim(\ker f) = 1}.$$
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned} f(u) &= (x+y+z, 2x-y+z) \\ &= (x, 2x) + (y, -y) + (z, z) \\ &= x \cdot (1,2) + y \cdot (1,-1) + z \cdot (1,1) \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,2),(1,-1),(1,1))$$
La famille de 3 vecteurs $(1,2),(1,-1),(1,1)$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$, mais elle n'est pas libre car $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; extrayons-en une base : exprimons un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned} & a \cdot (1,2) + b \cdot (1,-1) + c \cdot (1,1) = O_{\mathbb{R}^2} \\ \iff & (a+b+c, 2a-b+c) = (0,0) \\ \iff & \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} a+b+c=0 \\ -3b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ c = -3b \end{cases} \end{aligned}$$
Ainsi par exemple pour $a = 2, b = 1, c = -3$, $2 \cdot (1,2) + (1,-1) - 3 \cdot (1,1) = O_{\mathbb{R}^2}$ donc :
$$(1,-1) = -2 \cdot (1,2) + 3 \cdot (1,1)$$
Ainsi $\mathrm{Vect}((1,2),(1,-1),(1,1)) = \mathrm{Vect}((1,2),(1,1))$; et la famille de deux vecteurs $(1,2),(1,1)$ est libre puisque les deux vecteurs sont non-colinéaires. Ainsi cette famille

forme une base de Imf.

$$\boxed{\mathscr{B}_2 = \{(1,2),(1,1)\} \quad \text{est une base de Im}f \quad ; \quad \dim(\text{Im}f) = 2}$$

Remarque. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, une famille génératrice de Imf peut s'obtenir en prenant les images par f des vecteurs d'une base de E :

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors :

$$\text{Im}f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$$

Exercice 1. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$; montrer que $g \circ f = O_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement si Im$f \subset$ ker g.

Résolution.

2.2. **Injectivité et noyau ; surjectivité et image.**

Théorème 10.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; alors :
- *f est injective* $\iff \ker f = \{O_E\}$,
- *f est surjective* $\iff \text{Im}f = F$.

Remarque.
Pour une application $f : E \longrightarrow F$ non nécessairement linéaire, on savait deja que f surjectif $\iff f(E) = F$. Ainsi la deuxième propriété n'est qu'une reformulation pour une application linéaire d'une propriété plus générale.

Par contre la première ne se généralise pas à une application quelconque : par exemple $x \longmapsto x^2$ est une application non injective tandis que 0 est le seul antécédent de 0.

Démonstration.
Le 2ème résultat est trivial puisque Im$f = f(E)$ et qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective ssi $f(E) = F$ (cf. Chapitre "Applications").

Pour le premier résultat montrons deux implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons la contraposée : $\ker f \neq \{O_E\} \implies f$ non injective.
Si $\ker f \neq \{O_E\}$ alors $\dim(\ker f) \geqslant 1$ et donc $\ker f$ contient un vecteur $u \neq O_E$ tel que $f(u) = f(O_E) = O_F$; l'application est donc non injective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons la contraposée : f non injective $\implies \ker f \neq \{O_E\}$.
Supposons f non injective, et soit $(u,v) \in E^2$ avec $u \neq v$ et $f(u) = f(v)$; alors :

$$f(u) = f(v) \implies f(u) - f(v) = O_F \underset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{\implies} f(u-v) = O_F \implies u - v \in \ker f$$

Or $u - v \neq O_E$; donc $\ker f \neq \{O_E\}$. ■

3. Matrice associée à une application linéaire

3.1. Image d'une base par une application linéaire.

Théorème 11.
Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Étant donnée une famille de n vecteurs de F, $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = v_i.$$

C'est l'application définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \end{array}$$

Remarque. En d'autres termes, une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est uniquement déterminée par les images par f des vecteurs d'une base $\mathscr{B}$ de E.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ une famille de n vecteurs de F. L'application :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \end{array}$$

est linéaire ; en effet soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ et $(u, u') \in E^2$ avec $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et $u' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e_i$.

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u + \mu \cdot u') &= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu x'_i) \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu x'_i) \cdot v_i \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i + \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot v_i = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(u') \end{aligned}$$

Soit $g \in \mathscr{L}(E, F)$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ g(e_i) = v_i$. Montrons que $g = f$; soit $u \in E$; $u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n$,

$$g(u) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) \underset{g \in \mathscr{L}(E,F)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = f(u)$$

Ainsi $g = f$ ■

Exemples.

- Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$f(1, 0) = (1, 1, 1) \qquad ; \qquad f(0, 1) = (-1, 2, 1)$$

La famille $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (0,1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$; soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) \\ &= x \cdot f(e_1) + y \cdot f(e_2) \\ &= x \cdot (1,1,1) + y \cdot (-1,2,1) \\ &= (x-y, x+2y, x+y) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+2y, x+y) \end{array}$$

- Déterminer l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$f(1,1) = (2,2) \qquad ; \qquad f(1,-1) = (0,2).$$

Les deux vecteurs $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$ sont non colinéaires ; ils forment donc une famille libre dans $\mathbb{R}^2$; puisque $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Déterminons les coordonnées x_1, x_2 d'un vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$:

$$(x,y) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 = x_1 \cdot (1,1) + x_2 \cdot (1,-1) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ x_1 - x_2 = y \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2}}{\iff} \begin{cases} 2x_1 = x + y \\ 2x_2 = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{x+y}{2} \\ x_2 = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (x,y) = \frac{x+y}{2} \cdot e_1 + \frac{x-y}{2} \cdot e_2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x+y}{2} \cdot f(e_1) + \frac{x-y}{2} \cdot f(e_2) \\ &= \frac{x+y}{2} \cdot (2,2) + \frac{x-y}{2} \cdot (0,2) \\ &= \left(2 \times \frac{x+y}{2}, 2 \times \frac{x+y}{2} + 2 \times \frac{x-y}{2}\right) \\ &= (x+y, 2x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x). \end{array}$$

L'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ sont caractérisées à l'aide de la famille des images par f d'une base $\mathscr{B}$ de E :

Théorème 12.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E ; notons :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_i = f(e_i)$$

Alors :
- *f est injective $\iff$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une famille libre,*
- *f est surjective $\iff$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une famille génératrice de F,*
- *f est bijective $\iff$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de F.*

Démonstration. Démontrons séparément, les 3 propriétés :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \ker f = \{O_E\} && \text{(propriété 10)} \\ &\iff \forall u \in E, f(u) = O_F \implies u = O_E \\ &\iff f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\Big) = O_F \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = O_F \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \\ &\iff \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ est libre.} \end{aligned}$$

qui établit le premier point. Pour le deuxième :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\iff \forall v \in F, \exists u \in E, f(u) = v \\ &\iff \forall v \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\Big) = v \\ &\iff \forall v \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = v \\ &\iff \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ est une famille génératice de } F. \end{aligned}$$

ce qui montre le deuxième point. Pour le troisième point,

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} &\iff f \text{ est injective et surjective} \\ &\iff \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ est une famille libre et génératrice de } F \\ &\iff \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ est une base de } F. \end{aligned}$$

■

3.2. **Matrice d'une application linéaire dans une base.**

Définition 5.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soient $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Considérons la famille $f(\mathscr{B}) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ de vecteurs de F.

La matrice des coodonnées de la famille $f(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{C}$ est appelée matrice de l'application f dans les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F. On la note : $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_j) & f(e_n) \end{array} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} & a_{1,j} & \\ & \vdots & \\ & a_{i,j} & \\ & \vdots & \\ & a_{p,j} & \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Nombre de colonnes} \\ = \text{ dimension de } E}} \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} \substack{\text{Nombre de lignes} \\ = \text{ dimension de } F}$$

C'est une matrice dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $p = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$.

Remarque. C'est la matrice dont la j-ème colonne est la matrice colonne des coefficients de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exemples.

- Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. L'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Id}_E \ : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & u & \longmapsto & u \end{array}$$

a pour matrice dans la base $\mathscr{B}$ de E :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

en effet la matrice des coordonnées de $e_j = \mathrm{Id}_E(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(e_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } j$$

- Soit :

$$\begin{array}{rccl} f \ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+3y, 4x+5y) \end{array}$$

considérons les bases canoniques $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C} = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$e_1 = (1,0) \ ; \ e_2 = (0,1) \quad ; \quad e'_1 = (1,0,0) \ ; \ e'_2 = (0,1,0) \ ; \ e'_3 = (0,0,1)$$

$$f(e_1) = f(1,0) = (2,1,4) = 2 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2 + 4 \cdot e'_3 \implies Mat_{\mathscr{C}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (-1,3,5) = -1 \cdot e'_1 + 3 \cdot e'_2 + 5 \cdot e'_3 \implies Mat_{\mathscr{C}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\implies Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Si l'on change la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ pour la base $\mathscr{B}' = \{(1,1), (1,-1)\}$ alors :

$$f(1,1) = (1,4,9) = 1 \cdot e'_1 + 4 \cdot e'_2 + 9 \cdot e'_3 \implies Mat_{\mathscr{C}}(f(1,1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$f(1,-1) = (3,-2,-1) = 3 \cdot e'_1 - 2 \cdot e'_2 - \cdot e'_3 \implies Mat_{\mathscr{C}}(f(1,-1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

• Déterminer les entiers n et p et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dont la matrice dans les bases canoniques $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ est :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Nécessairement $n = 3$ et $p = 2$;

$$f(1,0,0) = (1,4) \quad ; \quad f(0,1,0) = (2,5) \quad ; \quad f(0,0,1) = (3,6)$$

$$\Longrightarrow f(x,y,z) = x \cdot (1,4) + y \cdot (2,5) + z \cdot (3,6) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

Remarque. D'après le théorème 11, une fois fixées des bases $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^p$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$$

est bijective ; c'est même un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

3.3. Calcul matriciel de l'image d'un vecteur.

Théorème 13.
Avec les mêmes notations ; soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $u \in E$ et $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F.
Soient les matrices :
– $Mat_{\mathscr{B}}(u)$: des coordonnées du vecteur $u \in E$ dans la base $\mathscr{B}$,
– $Mat_{\mathscr{C}}(f(u))$: des coordonnées du vecteur $f(u) \in F$ dans la base $\mathscr{C}$,
– $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$: de l'application f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Alors :
$$Mat_{\mathscr{C}}(f(u)) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}}(u).$$

Démonstration. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\mathscr{C} = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_p\}$ des bases de E et F ; soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $u \in E$ tels que :
$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$
Alors par définition :
$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = a_{1,j} \cdot e'_1 + \cdots + a_{p,j} \cdot e'_p = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \cdot e'_i.$$
Alors :
$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(e_j) && \text{car } f \text{ linéaire} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \cdot e'_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} x_j a_{i,j} \cdot e'_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j} \cdot e'_i && \text{interversion des } \sum \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) \cdot e'_i \end{aligned}$$
donc :
$$Mat_{\mathscr{C}}(f(u)) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
i.e. $\quad Mat_{\mathscr{C}}(f(u)) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}}(u)$ ■

3.4. **Propriétés.**

Propriété 14. (Linéarité)
Soient $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mu \cdot Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Démonstration. Découle de $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(e_i) = \lambda \cdot f(e_i) + \mu \cdot g(e_i)$ et du fait que $Mat_{\mathscr{C}}(\lambda \cdot f(e_i) + \mu \cdot g(e_i)) = \lambda \cdot Mat_{\mathscr{C}}(f(e_i)) + \mu \cdot Mat_{\mathscr{C}}(g(e_i))$ (cf. Chapitre "Espaces vectoriels" ; propriété des matrices coordonnées). ■

Propriété 15. (Matrice d'une composée)
Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$ *et* $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ *des bases de* E, F, G*. Alors :*
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Démonstration. Pour tout $u \in E$; d'après le théorème 13 :
$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{D}}(g \circ f(u)) &= Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) \times Mat_{\mathscr{B}}(u) \\ \text{et } Mat_{\mathscr{D}}(g \circ f(u)) &= Mat_{\mathscr{D}}(g(f(u))) \\ &= Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{C}}(f(u)) \\ &= Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}}(u) \end{aligned}$$
Ainsi, $\forall u \in E$:
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) \times Mat_{\mathscr{B}}(u) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}}(u)$$
Cette égalité est vraie pour tout vecteur $u \in E$, donc en particulier pour tout vecteur e_j de la base $\mathscr{B}$. Mais :
$$Mat_{\mathscr{B}}(e_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$
Ainsi les matrices $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f)$ et $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ ont mêmes colonnes ; elles sont donc égales. ■

Corollaire 16.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ *une base de* E *et* $k \in \mathbb{N}^*$,
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^k) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)^k.$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$; l'initialisation est claire, montrons l'hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $k \in \mathbb{N}^*$: $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^k) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)^k$.
D'après la propriété 15 :
$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^{k+1}) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^k \circ f) &= Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^k) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \\ &\underset{H.R.}{=} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)^k \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)^{k+1} \end{aligned}$$
■

Propriété 17. (Matrice d'un isomorphisme)
Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F ; f est un isomorphisme si et seulement si $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.
Dans ce cas :
$$Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)^{-1}.$$

Démonstration.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme alors :
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad ; \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$
D'après la propriété 15,
$$Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_p$$

Ainsi $n = p$, $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible et $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)^{-1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ inversible ; il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times B = B \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = I_n.$$
D'après le théorème 11 il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ qui admet B pour matrice dans les bases $\mathscr{C}$ de F et $\mathscr{B}$ de E. Alors d'après la propriété 15 :
$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g \circ f) = \underbrace{Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g)}_{=B} \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = I_n = Mat_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$
$$Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f \circ g) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \underbrace{Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g)}_{=B} = I_n = Mat_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_F)$$
Ainsi d'après le théorème 11, $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$; ainsi f est bijective, c'est un isomorphisme. ■

4. Rang

4.1. Rang d'une application linéaire.

Définition 6.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$; le rang de l'application linéaire f est défini par :
$$\mathrm{rang}\ f = \dim(\mathrm{Im} f)$$

Remarque. Pour une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E,
$$\mathrm{rang}\ f = \dim \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$$
et rang f ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ considérée.

Théorème 18.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *; alors :*
- f *est injective* $\iff \operatorname{rang} f = \dim E$,
- f *est surjective* $\iff \operatorname{rang} f = \dim F$,
- f *est bijective* $\iff \operatorname{rang} f = \dim E = \dim F$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E ; d'après le théorème 12 :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective } &\iff \text{ la famille } \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \text{ est libre} \\ &\iff \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \text{ est une base de } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \\ &\iff \dim \operatorname{Im} f = n = \dim E \\ &\iff \operatorname{rang} f = \dim E, \end{aligned}$$

montre le premier point. Pour le deuxième :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective } &\iff \text{ la famille } \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \text{ est génératrice de } F \\ &\iff \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = F \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \subset F$:

$$\begin{aligned} &\iff \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \dim F \\ &\iff \operatorname{rang} f = \dim F. \end{aligned}$$

Pour le troisième point :

$$f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective et surjective } \iff \operatorname{rang} f = \dim E = \dim F.$$

■

On en déduit le corollaire remarquable suivant : pour un endomorphisme les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité se recoupent :

Corollaire 19.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ *;*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Remarque. Plus généralement :

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\dim E = \dim F$:

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Ce résultat est utile pour E et F des s.e.v. ou des $\mathbb{K}$-e.v. autres que $\mathbb{K}^n$ (comme on en étudiera en 2ème année).

Le résultat suivant est particulièrement utile ; nous l'admettrons :

Théorème 20. (Théorème du rang)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$,

$$\dim \ker f + \operatorname{rang} f = \dim E.$$

Démonstration. Admis.

Remarques.
- Attention la dimension est celle de l'espace de départ.
- Ainsi connaître la dimension de $\ker f$ permet d'en déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$ et réciproquement.

Composer une application linéaire par un automorphisme ne change pas son rang :

Propriété 21.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *;*
- *si* $g \in \mathscr{L}(E)$ *est bijective, alors* $\operatorname{rang} f \circ g = \operatorname{rang} f$*,*
- *si* $g \in \mathscr{L}(F)$ *est bijective, alors* $\operatorname{rang} g \circ f = \operatorname{rang} f$*.*

Démonstration. Pour le premier point, montrons que si $g \in \mathscr{L}(E)$ est bijective alors $\operatorname{Im} f \circ g = \operatorname{Im} f$. Soit $v \in F$,

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Im} f &\iff \exists u \in E, v = f(u) \\ &\iff \exists u \in E, v = f \circ g(g^{-1}(u)) \end{aligned}$$

en posant $u' = g^{-1}(u) \in E$,

$$\begin{aligned} &\iff \exists u' \in E, v = f \circ g(u') \\ &\iff v \in \operatorname{Im} f \circ g. \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ g$; en particulier $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{rang} f \circ g$.

Pour le second point, montrons que si $g \in \mathscr{L}(F)$ est bijective alors $\ker g \circ f = \ker f$. Soit $u \in E$,

$$u \in \ker f \iff f(u) = O_F$$

puisque g est bijective :

$$\begin{aligned} &\iff g(f(u)) = O_F \\ &\iff g \circ f(u) = O_F \\ &\iff u \in \ker g \circ f. \end{aligned}$$

Ainsi $\ker f = \ker g \circ f$; en particulier $\dim \ker f = \dim \ker g \circ f$. On applique alors le théorème du rang :

$$\operatorname{rang} f = \dim E - \dim \ker f = \dim E - \dim \ker g \circ f = \operatorname{rang} g \circ f.$$

■

4.2. Rang d'une matrice.

Proposition-Définition 7.
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *des bases de* $\mathbb{K}^n$ *et* $\mathbb{K}^p$*.*
Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ *l'unique application linéaire telle que :*

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A.$$

On note $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang} f$ *le* *rang de la matrice* A *; il ne dépend pas des bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *considérées.*

Remarques.
- Nous avions pris comme définition du rang d'une matrice dans le chapitre "Les matrices", le nombre de ses pivots après l'avoir réduite par des opérations élémentaires sur ses lignes/colonnes ; sans démontrer alors que c'est bien défini (c'est-à-dire que ça ne dépend pas de la façon de procéder). Nous prouverons plus loin que ces deux définitions sont équivalentes, établissant par la même les propriétés jusqu'alors admises du rang d'une matrice.

• Dans le chapitre "Espaces vectoriels" nous avions admis que le rang d'une famille de vecteurs (c'est-à-dire la dimension du sous-espace qu'elle engendre) est égal au rang de sa matrice des coordonnées dans une base. Avec cette définition ce résultat découle immédiatement : en notant $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, le rang de f est la dimension de $\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, c'est à dire le rang de la famille $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, et $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est la matrice des coordonnées des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, dans la base $\mathscr{C}$.

Démonstration. Notons :

$$\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad ; \qquad \mathscr{C} = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$$

et considérons d'autres bases $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^p$:

$$\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\} \qquad ; \qquad \mathscr{C}' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_p\}$$

Considérons les endomorphismes :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e'_i \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot f_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot f'_i \end{array}$$

ϕ envoie la base $\mathscr{B}$ sur la base $\mathscr{B}'$; ψ envoie la base $\mathscr{C}$ sur la base $\mathscr{C}'$ (cf. théorème 11). D'après le théorème 12, ce sont deux endomorphismes bijectifs puisqu'ils envoient une base sur une base.

Considérons les applications linéaires $f, g : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ telles que :

$$A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(g).$$

Alors en notant $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\cdots n \\ j=1\cdots p}}$:

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

$$\text{et } \forall j \in [\![1, n]\!],\ g(e'_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f'_i$$

Ainsi, $\forall j \in [\![1, n]\!]$:

$$g(\underbrace{\phi(e_j)}_{=e'_j}) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \underbrace{\psi(f_i)}_{=f'_i}$$

$$\Longrightarrow \psi^{-1}(g \circ \phi(e_j)) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \psi^{-1}(\psi(f_i)) \qquad \text{car } \psi^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$$

$$\Longrightarrow \psi^{-1} \circ g \circ \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

$$\Longrightarrow \psi^{-1} \circ g \circ \phi(e_j) = f(e_j)$$

Ainsi les applications linéaires f et $\psi^{-1} \circ g \circ \phi$ ont mêmes images pour les vecteurs de la base $\mathscr{B}$; d'après le théorème 11 : $f = \psi^{-1} \circ g \circ \phi$. En particulier :

$$\text{rang } f = \text{rang } \psi^{-1} \circ g \circ \phi.$$

Or puisque ϕ et ψ^{-1} sont des endomorphismes bijectifs, d'après la propriété 21 :

$$\text{rang } f = \text{rang } \psi^{-1} \circ g \circ \phi = \text{rang } g$$

Ainsi le rang de la matrice A ne dépend pas des bases considérées. ■

Propriété 22.
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$;
- *Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \times B)$.
- *Si $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible, alors* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B \times A)$.

Remarque. Autrement dit, multiplier une matrice à droite ou à gauche par une matrice inversible ne change pas son rang.

Démonstration. Fixons une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ et une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^p$. La matrice A est alors la matrice dans ces bases d'une application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ et la matrice B celle d'un endomorphime $g \in \mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{B}$ (respectivement $\mathscr{L}(F)$ dans $\mathscr{C}$).

D'après la propriété 17, B étant inversible g est bijectif.

D'après la propriété 15, la matrice $A \times B$ (respectivement $B \times A$) est la matrice de la composée $f \circ g$ (respectivement $g \circ f$), et puisque g est bijectif, d'après la propriété 21 :
$$\operatorname{rang} f \circ g = \operatorname{rang} f \quad (\text{respectivement } \operatorname{rang} g \circ f = \operatorname{rang} f)$$
Ainsi par définition, $\operatorname{rang}(A\times B) = \operatorname{rang}(A)$ (respectivement $\operatorname{rang}(B\times A) = \operatorname{rang}(A)$).■

Théorème 23.
Une opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice :
$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad ; \quad L_i \leftrightarrow L_j \quad ; \quad L_i \leftarrow L_i + L_j$$
$$C_i \leftarrow \lambda C_i \quad ; \quad C_i \leftrightarrow C_j \quad ; \quad C_i \leftarrow C_i + C_j$$
(avec $\lambda \neq 0$) ne modifie pas son rang.

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons :
$$M_n(i,\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & i \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$
la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

Pour $\lambda \neq 0$, $M_n(i,\lambda)$ est inversible puisque $M_n(i,\lambda) \times M_n(i,\frac{1}{\lambda}) = I_n$.

Or multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $M_n(i,\lambda)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à la matrice A :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\quad L_1 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_n \quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad L_1 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad \lambda L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_n \quad} \end{pmatrix}$$

et multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ à droite par $M_n(i,\lambda)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à la matrice A :

$$\left(\boxed{C_1} \cdots \boxed{C_i} \cdots \boxed{C_n}\right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\boxed{C_1} \cdots \boxed{\lambda C_i} \cdots \boxed{C_n}\right)$$

Ainsi, d'après la propriété 22, si $\lambda \neq 0$, une opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$ ne change pas le rang de la matrice A.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$E_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Cette matrice $E_n(i,j)$ est inversible puisque $E_n(i,j) \times E_n(i,j) = I_n$.

Or multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $E_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ à droite par $E_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ à la matrice A :

$$\left(\cdots \boxed{C_i} \cdots \boxed{C_j} \cdots\right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\cdots \boxed{C_j} \cdots \boxed{C_i} \cdots\right)$$

Ainsi, d'après la propriété 22, une opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ ne change pas le rang de la matrice A.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$T_n(i,j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \qquad T'_n(i,j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

$T_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$; $T'_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + C_j$.

Ces deux matrices sont inversibles car triangulaires sans aucun 0 sur leur diagonale.

Or multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i + L_j \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ à droite par $T'_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + C_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} \cdots & \boxed{C_i} & \cdots & \boxed{C_j} & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \boxed{\begin{array}{c} C_i \\ + \\ C_j \end{array}} & \cdots & \boxed{C_j} & \cdots \end{pmatrix}$$

Ainsi, d'après la propriété 22, une opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$ ne change pas le rang de la matrice A. ■

Définition 8.
On rappelle qu'une matrice est <u>échelonnée</u> si le nombre de zéros en début de ligne augmente strictement ligne après ligne tant qu'il n'a pas atteint le nombre de colonnes de la matrice.
Pour une matrice échelonnée, ses <u>pivots</u> sont les premiers coefficients non-nuls sur chaque ligne.
Ainsi le nombre de pivots d'une matrice échelonnée est égal au nombre de lignes non-nulles.

Remarque. Définition deja vue au chapitre "Les matrices".

Théorème 24.
Le rang d'une matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots.

Remarque. Avec les théorèmes 23 et 24, le rang d'une matrice est donc égal au nombre de ses pivots dans une matrice échelonnée obtenue en lui appliquant des opérations élémentaires (sur les lignes ou colonnes). On retrouve la définition du chapitre "Les matrices".

Démonstration. Considérons une matrice échelonnée, notons p son nombre de pivots, et appliquons des opérations élémentaires d'échanges de colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$ pour que le nombre de zéros augmente de 1 ligne après ligne sur les lignes non nulles :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3\leftrightarrow C_4\\ C_4\leftrightarrow C_5\\ C_5\leftrightarrow C_6}]{} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & v_1 & v_2 & & v_p & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ 0 & 0 & a_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_p & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_p \\ \\ \end{array} \end{array}$$

D'après le théorème 23 on n'a pas changé le rang de la matrice après ces opérations élémentaires.

Soit q le nombre de lignes de la matrice. Fixons une base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_q\}$ de $\mathbb{K}^q$. Notons $v_1, v_2, \dots, v_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^q$ dont les matrices des coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont les p premières colonnes non-nulles de la matrice (de droite). Notons aussi $w_1, \dots, w_r$ les vecteurs de $\mathbb{K}^q$ fournis par les colonnes restantes.

Par construction tous les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ et $w_1, \dots, w_r$ sont dans le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^q$; de plus pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,
$$v_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1}).$$

Montrons que $v_1, v_2, \dots, v_p$ est une famille libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des scalaires tels que :
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_p \cdot v_p = O_{\mathbb{K}^q}$$
Puisque $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_{p-1} \cdot v_{p-1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ et $v_p \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ nécessairement $\lambda_p = 0$. Ainsi :
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_{p-1} \cdot v_{p-1} = O_{\mathbb{K}^q} \quad \text{et } \lambda_p = 0$$
Mais en appliquant le même raisonnement à la famille $v_1, v_2, \dots, v_{p-1}$ et ainsi de suite, on en déduit que :
$$\lambda_p = \lambda_{p-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$$
ainsi la famille $v_1, v_2, \dots, v_p$ est une famille libre de p vecteurs dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$; c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Finalement, puisque $w_1, \dots, w_r$ sont des vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$:
$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$$
qui est de dimension p. Donc le rang de la matrice est égal à p. ■

Propriété 25. *Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$;*
$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$$

Démonstration. Notons p le rang de A. En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on transforme la matrice à l'aide d'opérations élémentaires pour obtenir une matrice échelonnée, puis comme dans la preuve du théorème précédent on applique des échanges sur les colonnes pour que le nombre de zéros augmente de 1 lignes après lignes sur les lignes non nulles.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ 0 & 0 & a_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_p & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La même suite d'opérations appliquée en partant de ${}^tA$ mais sur les colonnes/lignes plutôt que sur les lignes/colonnes permet d'aboutir à la matrice transposée de la précédente.

$${}^tA \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & a_p & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant des échanges sur ses lignes et ses colonnes on obtient une matrice dont les p premières lignes sont échelonnées, de même rang que ${}^tA$:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_p & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_p & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que l'on transforme en une matrice échelonnée en appliquant des opérations élémentaires sur ses dernières lignes non échelonnées en utilisant les p premières lignes échelonnées. D'après le théorème 23 la matrice obtenue a même rang que ${}^tA$ qui d'après le théorème 24 est égal à son nombre de pivots, soit $p = \mathrm{rang}(A)$. ■

Pour conclure, on retrouve la notion de rang d'une système linéaire :

Définition 9. *Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice associée.*