Chapitre 26

Géométrie du plan et de l'espace

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

1. Le plan et l'espace affine

1.1. Vecteurs du plan et de l'espace.

Définition 1.
On considère les espaces vectoriels $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *et* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
- *Un vecteur du plan est un vecteur de* $\mathbb{R}^2$.
- *Un vecteur de l'espace est un vecteur de* $\mathbb{R}^3$.

On a coutume de noter $\vec{u}$ *un vecteur du plan ou de l'espace. Si* $\vec{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, *on peut décrire* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *par leur matrice des coordonnées dans la base canonique ; le vecteur nul est noté* $\vec{0}$ *dans le plan et dans l'espace.*

$$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

La notion de vecteurs colinéaires est omniprésente en géométrie :

Définition 2. *Deux vecteurs du plan ou de l'espace sont dits colinéaires si :*
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \text{ ou } \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Remarque. Si $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$.

La colinéarité de deux vecteurs du plan se caractérise à l'aide du déterminant :

Propriété 1. *Soient* $\vec{u} = (a, b)$ *et* $\vec{v} = (c, d)$ *deux vecteurs du plan ; alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement si :*
$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc = 0.$$

Démonstration.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si par exemple $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ alors $a = \lambda c$ et $b = \lambda d$,
$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda c & c \\ \lambda d & d \end{pmatrix} = \lambda cd - \lambda cd = 0.$$
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $ad - bc = 0 \implies ad = bc$.
– Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{v} = 0 \cdot \vec{u}$ et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
– Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors (par exemple) $d \neq 0$,
$$\implies a = \frac{b}{d} \times c \text{ et } b = \frac{b}{d} \times d \implies \vec{v} = \frac{b}{d} \cdot \vec{u}$$

Remarque. Pour deux vecteurs, être colinéaire est une relation :
– Réflexive : $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

– Symétrique : si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
– Transitive : si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{w}$.

1.2. **Représentation du plan et de l'espace affine.**

• Le plan $\mathscr{P}$ est caractérisé par l'existence d'une application :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}\times\mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

défini par la donnée de 3 points O, I, J du plan tels que :

$$\overrightarrow{OI} = (1,0) \qquad ; \qquad \overrightarrow{OJ} = (0,1)$$

et vérifiant la condition $(*)$.

• L'espace $\mathscr{E}$ est caractérisé par l'existence d'une application :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

défini par la donnée de 4 points O, I, J, K de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{OI} = (1,0,0) \qquad ; \qquad \overrightarrow{OJ} = (0,1,0) \qquad ; \qquad \overrightarrow{OK} = (0,0,1)$$

et vérifiant la condition $(*)$.

Condition $(*)$:
– Pour tout point C de $\mathscr{P}$ (respectivement de $\mathscr{E}$) et tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$), il existe un unique point $M \in \mathscr{P}$ (resp. $M \in \mathscr{E}$) tel que $\overrightarrow{CM} = \vec{u}$.
– **Relation de chasles :** $\forall (A,B,C) \in \mathscr{P}^3$ (respectivement $\mathscr{E}^3$) :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Remarque. En particulier, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$), il existe un unique point $M \in \mathscr{P}$ (resp. $M \in \mathscr{E}$) tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Ces applications vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 2. *Pour tous points A, B de $\mathscr{P}$ (respectivement de E) :*

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \qquad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Démonstration. Elles découlent toutes de la relation de Chasles et des propriétés de $+$ et $\cdot$:

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BA} \implies \overrightarrow{AA} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \implies \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}. \end{array}$$

■

Définition 3.
La donnée de ces application définit :
• *un <u>repère cartésien du plan</u> : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en notant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.*
Si de plus $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$, le repère est dit <u>orthonormé</u>.
• *un <u>repère cartésien de l'espace</u> : $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en notant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.*

Si de plus $(OI) \perp (OJ)$, $(OI) \perp (OK)$, $(OJ) \perp (OK)$ et $OI = OJ = OK = 1$, le repère est dit orthonormé.

Les coordonnées d'un point M :

- du plan, sont les uniques réels a, b tels que :

$$\overrightarrow{OM} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} \quad ; \quad \text{on note } M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

- de l'espace, sont les uniques réels a, b, c tels que :

$$\overrightarrow{OM} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k} \quad ; \quad \text{on note } M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Propriété 3. *Donné un repère cartésien du plan ou de l'espace, pour tous points A, B :*

- *Si* $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *et* $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ *alors* $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- *Si* $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ *et* $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ *alors* $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Démonstration. Montrons le pour deux points du plan, la preuve est analogue dans l'espace. On a par définition :

$$\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}$$
$$\overrightarrow{OB} = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} \implies \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

2. Droites et plans

2.1. Droites du plan et de l'espace.

2.1.1. *Définitions.*

Définition 4.
• *Étant donnés deux points distincts A et B du plan ou de l'espace, la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.*
• *Étant donnés un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan ou de l'espace, la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est la droite (AB) où B vérifie $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On la note aussi $(A, \vec{u})$.*
C'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
• *Dans tous les cas, tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite.*

Remarque. Par transitivité de la relation de colinéarité, la droite (AB) est donc aussi la droite (AC) pour tout $C \in (AB)$ distinct de A.
La droite $(A, \vec{u})$ est aussi la droite $(A, \vec{v})$ pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul colinéaire à $\vec{u}$.
En particulier donnés deux points distincts A et B, la droite (AB) est l'unique droite passant par A et B ; donné $\vec{u} \neq \vec{0}$, la droite $(A, \vec{u})$ est l'unique droite passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Définition 5. *Trois points A, B, C sont dits alignés si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Remarques.
• A, B, C sont alignés si et seulement si B, A, C sont alignés (car $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$), etc.
• Lorsque A, B, C sont alignés et $A \neq B$, nécessairement $C \in (AB)$.

Définition 6. *Deux droites sont dites parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.*

Remarque. Ça ne dépend pas du vecteur directeur puisqu'être colinéaire est une relation transitive.

2.1.2. *Équations paramétriques d'une droite du plan ou de l'espace.*

• Un système d'équations paramétriques d'une droite du plan $\mathscr{D} = (A, \vec{u})$ est donnée par la méthode suivante :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{u} \iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot \alpha \\ y = y_A + \lambda \cdot \beta \end{cases}}$$

Ce sont des équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$.

• De même pour une droite de l'espace $\mathscr{D} = (A, \vec{u})$; soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$;

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{D} \iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot \alpha \\ y = y_A + \lambda \cdot \beta \\ z = z_A + \lambda \cdot \gamma \end{cases}}$$

sont des équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$.

Exemple. Déterminer des équations paramétriques pour la droite (AB) de l'espace avec : $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 1 = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z - 2 = -2\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

La droite (AB) a donc pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.1.3. *Équation cartésienne d'une droite du plan.*

Une équation cartésienne de la droite du plan $\mathscr{D} = (A, \vec{u})$ avec $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ s'obtient par la méthode :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \det \begin{pmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0 \end{aligned}$$

en posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -x_A\beta + y_A\alpha$:

$$\iff \boxed{ax + by + c = 0}$$

C'est une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$.

Remarque. Une telle équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq 0$ définit une droite

$\mathscr{D} = (A, \vec{u})$ du plan ; prendre :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{b}\end{pmatrix} & \text{si } b \neq 0 \\ A\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\end{pmatrix} & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

En particulier :

Propriété 4. *La droite du plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + c = 0$ (avec $(a, b) \neq 0$) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.*

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) où $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \det\begin{pmatrix}x-1 & 1\\y-1 & -2\end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -2(x-1) - (y-1) = 0 \iff \boxed{2x + y - 3 = 0} \end{aligned}$$

Le parallélisme de deux droites peut se caractériser à l'aide des coefficients de leurs équations :

Propriété 5. *Deux droites du plan d'équations :*

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

sont parallèles si et seulement si :

$$\det\begin{pmatrix}a & a'\\b & b'\end{pmatrix} = 0.$$

Démonstration. Elles ont pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ et sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, si et seulement si :

$$\det\begin{pmatrix}-b & -b'\\a & a'\end{pmatrix} = -ba' + b'a = 0$$

$$\iff ab' - a'b = \det\begin{pmatrix}a & a'\\b & b'\end{pmatrix} = 0.$$

■

Définition 7.
Une droite du plan non verticale, c'est-à-dire d'équation $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$ a pour pente le réel p tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}$ en soit un vecteur directeur.

Remarques.

- Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de pentes p et p' sont parallèles si et seulement si $p = p'$. En effet :

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ p & p'\end{pmatrix} = 0 \iff p' - p = 0 \iff p = p'.$$

• Une droite non verticale $\mathscr{D}$: $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$ a pour pente $\dfrac{-a}{b}$. Elle admet alors pour équation cartésienne :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\boxed{y = \text{pente} \times x + \text{ordonnée à l'origine}}$$

2.2. **Plan de l'espace.**

2.2.1. *Définition.*

Définition 8.
• *Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace $\mathscr{E}$. Le plan passant par A, B et C, noté (ABC), est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ pour lesquels il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :*

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}.$$

• *Soit A un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(A, \vec{u}, \vec{v})$, est défini comme le plan passant par A, B et C où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.*
C'est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ pour lesquels il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}.$$

Remarque. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}\\
\iff &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{BC}\\
\iff &\overrightarrow{BM} = (1 - \lambda - \mu) \cdot \overrightarrow{BA} - \mu \cdot \overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Le plan passant par A, B et C est donc aussi celui passant par B, A et C, etc. : il ne dépend pas de l'ordre des points.

Propriété 6. *Par trois points non alignés passe un et un seul plan.*

Démonstration. Soient D, E, F trois points non alignés appartenant au même plan passant par A, B, C.

Puisque A, B, C sont non alignés, A, B, D ou B, C, D sont non alignés ; supposons sans perte de généralité que B, C, D soit non aligné. On a puisque $D \in (ABC)$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AD} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}\\
\implies &\overrightarrow{AD} = a \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + b \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)\\
\implies &(a + b - 1) \cdot \overrightarrow{DA} = a \cdot \overrightarrow{DB} + b \cdot \overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

et puisque D, C, B sont non alignés, nécessairement $(1 - a - b) \neq 0$ donc :

$$\overrightarrow{DA} = \frac{a}{a + b - 1} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{b}{a + b - 1} \cdot \overrightarrow{DC}$$

Ainsi A est dans le plan (BCD). Mais alors le plan (ABC) est inclus dans le plan (BCD) ; en effet soit $M \in (ABC)$:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{BA} + \beta \cdot \overrightarrow{BC} \\ \text{et } & \overrightarrow{BA} = \gamma \cdot \overrightarrow{BC} + \delta \cdot \overrightarrow{BD} \\ \Longrightarrow & \overrightarrow{BM} = (\alpha\gamma + \beta) \cdot \overrightarrow{BC} + \alpha\delta \cdot \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

En répétant le même argument, on montrerait que (ABC) est inclus dans le plan (DEF), et réciproquement que (DEF) est inclus dans le plan (ABC). Ainsi les plans (ABC) et (DEF) sont confondus. ∎

2.3. Équation paramétrique d'un plan de l'espace.

Propriété 7. *Soient :*

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (A, \vec{u}, \vec{v})$ *si et seulement si :*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 \\ y = y_A + \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 \\ z = z_A + \lambda \cdot z_1 + \mu \cdot z_2 \end{cases}$$

Ce sont des *<u>équations paramétriques du plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$</u>*.

Démonstration. D'après la propriété précédente, $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

∎

Exemple. Soient : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe un unique plan contenant A, B, C et en déterminer des équations paramétriques.

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

qui sont non colinéaires. Donc A, B, C sont non alignés, et il existe donc un unique plan contenant ces 3 points. C'est le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Donc :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \iff \boxed{\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=2-\lambda-\mu\\ z=1-\mu\end{cases}\quad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

3. Produit scalaire

Dans toute cette partie le plan et l'espace sont munis de repères orthonormés.

3.1. Produit scalaire.

3.1.1. *Définition.*

Définition 9.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace ; leur produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est :

- *dans le plan :* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$
- *dans l'espace :* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$,
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'.$$

Remarque. Le produit scalaire est une application de $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$) dans $\mathbb{R}$.

3.1.2. *Propriétés algébriques.*

Propriété 8. *Le produit scalaire est :*

- *bilinéaire :*
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot(\lambda\cdot\vec{v})=(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
- *Symétrique :*
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$
- *Défini :*
$$\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \iff \vec{u}=\overrightarrow{0}$$
- *Positif :*
$$\vec{u}\cdot\vec{u}\geqslant 0$$

Démonstration. Toutes s'obtiennent pas calcul direct ; par exemple dans le plan, avec :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad;\quad\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\quad;\quad\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}:$$

Pour les trois premières :

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'') = xx'+yy'+xx''+yy'' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (x+x')x''+(y+y')y'' = xx''+yy''+x'x''+y'y'' = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot(\lambda\cdot\vec{v}) = x\lambda x'+y\lambda y' = \lambda(xx'+yy') = \lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda xx'+\lambda yy' = \lambda(xx'+yy') = \lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = x'x+y'y = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

Pour les deux dernières :

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2 \geqslant 0 \quad \text{avec égalité} \iff x=y=0 \iff \vec{u}=\vec{0}. \qquad \blacksquare$$

3.1.3. *Orthogonalité.*

Définition 10. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.*

Remarque. Toute famille de vecteurs non nuls et 2 à 2 orthogonaux est libre.
En effet, si $\vec{u}_1,\dots\vec{u}_n$ est une famille de vecteurs non nuls et 2 à 2 orthogonaux alors :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\cdot\vec{u}_1+\lambda_2\cdot\vec{u}_2+\dots+\lambda_n\cdot\vec{u}_n = \vec{0}\\
\Longrightarrow\ &(\lambda_1\cdot\vec{u}_1+\lambda_2\cdot\vec{u}_2+\dots+\lambda_n\cdot\vec{u}_n)\cdot\vec{u}_n = \vec{0}\cdot\vec{u}_n\\
\Longrightarrow\ &\lambda_1\cdot\underbrace{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_n}_{=0}+\lambda_2\cdot\underbrace{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_n}_{=0}+\dots+\lambda_n\cdot\vec{u}_n\cdot\vec{u}_n=0\\
\Longrightarrow\ &\lambda_n\cdot\underbrace{\vec{u}_n\cdot\vec{u}_n}_{\neq 0}=0 \Longrightarrow \lambda_n=0
\end{aligned}$$

Par le même argument, en formant le produit scalaire par $\vec{u}_{n-1},\dots,\vec{u}_1$ on obtient de proche en proche $\lambda_n=\dots=\lambda_2=\lambda_1=0$. Donc la famille est libre.
En particulier puisque $\dim\mathbb{R}^2=2$ et $\dim\mathbb{R}^3=3$, nécessairement $n\leqslant 3$; plus précisément une famille de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux, est composée d'au plus 2 vecteurs dans le plan et trois dans l'espace.

3.2. **Norme euclidienne.**

3.2.1. *Définition et propriétés.*

Définition 11. *La norme euclidienne du vecteur $\vec{u}$ est le réel positif noté $\|\vec{u}\|$:*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}.$$

Propriété 9.
- *Positivité.* $\|\vec{u}\|\geqslant 0$.
- *Homogénéité.* $\|\lambda\cdot\vec{u}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{u}\|$.
- *Séparation.* $\|\vec{u}\|=0 \iff \vec{u}=\vec{0}$.

Démonstration.
Positivité : Elle découle immédiatement de la définition.
Homogénéité :

$$\|\lambda\cdot\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda\cdot\vec{u})\cdot(\lambda\cdot\vec{u})} = \sqrt{\lambda^2\cdot\vec{u}\cdot\vec{u}} = |\lambda|\times\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = |\lambda|\cdot\|\vec{u}\|$$

Séparation :

$$\|\vec{u}\|=0 \iff \vec{u}\cdot\vec{u}=0 \iff \vec{u}=\vec{0}.$$

■

Propriété 10. (Identités remarquables)

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Démonstration. Elles découlent de $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$ et de la bilinéarité et de la symétrie du produit scalaire. Les calculs sont identiques à ceux dans $\mathbb{R}$ en changeant $\times$ par le produit scalaire. ■

3.3. **Inégalité de Cauchy-Schwarz ; inégalité triangulaire.**

Théorème 11. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration.
Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ l'assertion est immédiate puisque $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| = 0$ et tout vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{0}$.
Supposons dans la suite que $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$.
Notons pour tout réel x :

$$T(x) = \|x\cdot\vec{u}+\vec{v}\|^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned}T(x) &= (x\cdot\vec{u}+\vec{v})\cdot(x\cdot\vec{u}+\vec{v}) \\ &= x^2\|u\|^2 + 2x\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + \|v\|^2\end{aligned}$$

c'est un trinôme en x de discriminant :

$$\Delta = 4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $T(x) = \|x\cdot\vec{u}+\vec{v}\|^2 \geqslant 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\Delta \leqslant 0 &\iff 4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leqslant 0 \\ &\iff (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 \\ &\iff -\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \qquad \text{car } \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \geqslant 0 \\ &\iff |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\end{aligned}$$

De plus l'égalité a lieu lorsque $\Delta = 0$

$$\begin{aligned}&\iff \exists x\in\mathbb{R},\ T(x) = 0 \\ &\iff \exists x\in\mathbb{R},\ \|x\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 0 \\ &\iff \exists x\in\mathbb{R},\ x\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \exists x\in\mathbb{R},\ \vec{v} = -x\cdot\vec{u} \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \qquad \text{car } \vec{u} \neq \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

■

Théorème 12. (Inégalité triangulaire)

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \\
\iff & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leqslant (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 && \text{car tout est } \geqslant 0 \\
\iff & \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\
\iff & \vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|
\end{aligned}$$

qui est vrai d'après Cauchy-Schwarz. De plus si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors l'inégalité est stricte.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quitte à échanger les rôles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut supposer $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v}$. De plus si $\|\vec{v}\| = 0$ alors $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens ; la conclusion est vérifiée. Supposons donc en outre que $\|\vec{v}\| \neq 0$. Alors :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|(\lambda+1)\cdot\vec{v}\| = |\lambda+1|\cdot\|\vec{v}\| \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$$

$$\begin{aligned}
\text{alors } & \|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \\
\iff & |\lambda+1|\cdot\|\vec{v}\| = (|\lambda|+1)\cdot\|\vec{v}\| \\
\iff & |\lambda+1| = |\lambda|+1 && \text{car } \|\vec{v}\| \neq 0 \\
\iff & |\lambda+1|^2 = (|\lambda|+1)^2 && \text{car tout est positif} \\
\iff & (\lambda+1)^2 = (|\lambda|+1)^2 \\
\iff & \lambda^2 + 2\lambda + 1 = |\lambda|^2 + 2|\lambda| + 1 \\
\iff & \lambda = |\lambda| \\
\iff & \lambda \geqslant 0
\end{aligned}$$

i.e. ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens. ∎

3.3.1. *Angle géométrique entre deux vecteurs.*

Proposition-Définition 12. *L'angle géométrique entre 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace est le réel $\theta \in [0,\pi]$ tel que :*

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Démonstration. Montrons que θ est bien défini. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \neq 0$ et donc :

$$-1 \leqslant \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \leqslant 1$$

Or cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$, et donc il existe un unique réel $\theta \in [0,\pi]$ tel que :

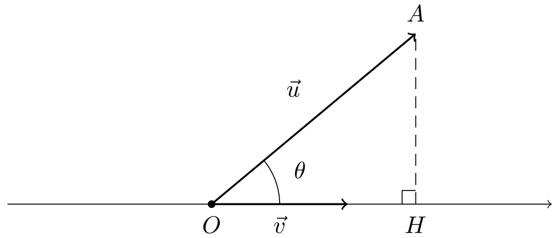
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$ ∎

En particulier :

Propriété 13. *Si θ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

Remarque. Si le vecteur $\vec{v}$ est de norme 1, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à la longueur algébrique $\overline{OH}$ sur la droite orientée $\mathscr{D} = (O, \vec{v})$ du projeté orthogonal H sur $\mathscr{D}$ du point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Sinon $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OH} \times \|\vec{v}\|$.



3.4. **Vecteur normal à une droite ou un plan.**

3.4.1. *Vecteur normal à une droite du plan.*

Définition 13.
Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ du plan est <u>normal à une droite</u> $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Remarque. Par bilinéarité du produit scalaire, $\vec{n} \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}$ et donc ça ne dépend pas du vecteur directeur de $\mathscr{D}$ considéré.

Propriété 14.
Donnés A un point du plan et $\vec{n}$ est un vecteur non nul, il existe une unique droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
De plus si $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, cette droite a pour équation :

$$ax + by + c = 0$$

Démonstration. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}$ une droite dont $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal ; alors :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \quad \text{car } \begin{cases} M \neq A \implies \overrightarrow{AM} \text{ est v.d. de } \mathscr{D} \\ M = A \implies M \in \mathscr{D} \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \\
&\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
&\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\
&\iff ax + by + \underbrace{(-ax_A - by_A)}_{=c} = 0
\end{aligned}$$

qui est l'équation d'une droite puisque $(a, b) = \vec{n} \neq \vec{0}$. ■

Exemple. Déterminer une équation de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec :

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Elle est de la forme $x + 2y + c = 0$ et puisque la droite passe par A :

$$1 + 2\times(-1) + c = 0 \implies c = 1$$

Donc une équation de la droite est :

$$x + 2y + 1 = 0.$$

Propriété 15. *Deux droites du plan de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.*

Démonstration. Notons : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

Ces deux droites admettent donc des équations de la forme $ax + by + c = 0$ pour la première et $a'x+b'y+c' = 0$ pour la seconde. D'après la propriété 5, elles sont parallèles si et seulement si :

$$\det\begin{pmatrix}a & a'\\ b & b'\end{pmatrix} = 0$$

et donc d'après la propriété 1 si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires. ∎

Propriété 16.
Deux droites du plan peuvent être : parallèles, sécantes, ou confondues.
De plus donnés une droite $\mathscr{D}$ et un point A il passe une seule parallèle à $\mathscr{D}$ par A.

Démonstration. Notons $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ des équations de deux droites. Le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0\\ a'x + b'y + c' = 0\end{cases}$$

peut avoir aucune, une ou infinité de couples (x, y) solutions. Les droites sont sécantes lorsque la solution est unique, c'est-à-dire lorsque :

$$\det\begin{pmatrix}a & a'\\ b & b'\end{pmatrix} \neq 0$$

Dans le cas contraire ces deux droites ont des vecteurs normaux colinéaires, et sont donc parallèles. De plus par unicité d'une droite passant par un point et de vecteur normal donné, si elles ont en outre un point commun elles sont alors confondues.

Pour la deuxième assertion une parallèle à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet pour équation $ax + by + d = 0$; et la donnée d'un point A détermine uniquement d et donc la parallèle passant par A. ∎

Définition 14. *Deux droites du plan sont dites perpendiculaires si elles ont des vecteurs normaux orthogonaux.*

Remarque. Par bilinéarité du produit scalaire, ça ne dépend pas des vecteurs normaux considérés.

3.4.2. *Vecteur normal à un plan de l'espace.*

Définition 15.
Un vecteur $\vec{n} \neq \overrightarrow{0}$ de l'espace est <u>*normal à un plan*</u> *$\mathscr{P}$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.*

Remarque. Par bilinéarité du produit scalaire, si $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ alors $\vec{n} \cdot \omega = \lambda \cdot \vec{n} \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ et donc ça ne dépend pas des vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$ considérés. De plus $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de Vect$(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 17.
Donnés un point A de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul, il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Si de plus $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors le plan $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Démonstration. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; montrons d'abord l'existence d'un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Puisque $\vec{n} \neq \overrightarrow{0}$, supposons sans perte de généralité que $a \neq 0$. Alors les deux vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

sont non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$. Ainsi le plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$ passe par A et admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.

Montrons maintenant l'unicité de ce plan. Par l'absurde, supposons l'existence d'un autre plan passant par A et normal à $\vec{n}$. Alors nécessairement il existe un vecteur directeur $\vec{w}$ de ce plan tel que :

$$\vec{w} \notin Vect(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \text{et} \qquad \vec{n} \cdot \vec{w} = 0.$$

Puisque $\vec{w} \notin Vect(\vec{u}, \vec{v})$ et que la famille $\vec{u}, \vec{v}$ est libre, nécessairement la famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est libre. Donc $Vect(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un sev de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$. Mais puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, nécessairement $Vect(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathbb{R}^3$ et donc $\vec{n} \in Vect(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. En particulier

$$\|\vec{n}\|^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}) = a \cdot \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{u}}_{=0} + b \cdot \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{v}}_{=0} + c \cdot \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{w}}_{=0} = 0$$

et donc $\vec{n} = \overrightarrow{0}$. C'est contradictoire.

Montrons maintenant la dernière assertion :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - bx_B - cx_C)}_{=d} = 0 \end{aligned}$$

C'est l'équation cartésienne recherchée. ∎

Exemple. Déterminer l'équation du plan $\mathscr{P}$ de l'espace passant par l'origine et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On cherche une vecteur normal au plan $\mathscr{P}$: $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \iff \begin{cases}a+b \quad\;\; =0\\ \quad\;\; b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=c\\ b=-c\end{cases}$$

On peut donc prendre $\vec{n}=(1,-1,1)$. Le plan $\mathscr{P}$ a donc une équation de la forme $x-y+z+d=0$; puisqu'il passe par l'origine, il admet pour équation :

$$x-y+z=0.$$

Définition 16. *Deux plans de l'espaces sont dits parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires.*

Remarque. Par transitivité de la colinéarité, ça ne dépend pas des vecteurs normaux considérés.

Propriété 18.
Deux plans de l'espace peuvent être parallèles, confondus, ou s'intersectent le long d'une droite.
Donnés un plan et un point de l'espace il existe un unique plan parallèle passant par ce point.

Démonstration. Soient $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans de l'espaces de vecteur normaux :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}.$$

Si les plans sont parallèles alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}, \vec{n'}=\lambda\cdot\vec{n}$ et donc les deux systèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-\lambda\cdot L_1}{\iff} \begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ d'-\lambda\cdot d=0\end{cases}$$

et donc ils sont compatibles si et seulement si $d'=\lambda\cdot d$,

$$\iff a'x+b'y+c'z+d'=\lambda\times(ax+by+cz+d)$$

c'est-à-dire si et seulement si les deux plans sont confondus.

Lorsque les deux plans sont non parallèles (ni confondus) alors quitte à échanger les rôles de x,y,z on peut supposer que $a\neq 0$ et alors :

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow aL_2-a'\cdot L_1}{\iff} \begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ \qquad \beta y+\gamma z+\delta=0\end{cases}$$

pour des réels β, γ, δ avec $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$. Quitte encore à échanger les rôles de y et z, supposons sans perte de généralité que $\beta \neq 0$, alors :

$$\iff \begin{cases} x = \left(-d + \dfrac{bd}{\beta}\right) + \left(\dfrac{b\gamma}{\beta} - c\right) \cdot \lambda \\ y = -\dfrac{d}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\beta} \cdot \lambda \\ z = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

C'est une paramétrisation d'une droite de l'espace qui définit l'ensemble des points communs aux deux plans.

Pour la deuxième assertion, soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$, alors tout plan parallèle à $\mathscr{P}$ admet aussi pour vecteur normal $\vec{n}$, et donc d'après le propriété 17 il en existe un seul passant par un point A donné. ■

Définition 17. *Une droite dirigée par $\vec{u}$ et un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$ sont dits parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.*

Propriété 19. *Une droite et un plan de l'espace non parallèles s'intersectent en un seul point.*

Démonstration. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $(A, \vec{u})$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur normal d'un plan $\mathscr{P}$.
Alors $\mathscr{P}$ a une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ et

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (A, \vec{u}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot a \\ y = y_A + \lambda \cdot b \\ z = z_A + \lambda \cdot c \end{cases}$$

et donc si M appartient à l'intersection de $(A, \vec{u})$ et $\mathscr{P}$, alors :

$$\begin{aligned} & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha(x_A + \lambda \cdot a) + \beta(y_A + \lambda \cdot b) + \gamma(z_A + \lambda \cdot c) + d = 0 \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \times (a\alpha + b\beta + c\gamma) = -d - \alpha x_A - \beta y_A - \gamma z_A \end{aligned}$$

Ainsi l'intersection contient un unique point si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ c'est à dire si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, si et seulement si la droite et le plan ne sont pas parallèles. ■

Définition 18.
Deux plans de l'espace sont dits perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
Une droite dirigée par $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Remarques.
• Par bilinéarité du produit scalaire, ça ne dépend pas des vecteurs normaux considérés. Par transitivité de la colinéarité ça ne dépend pas du vecteur directeur considéré.
• Une droite et un plan perpendiculaires s'intersectent en un seul point. En effet deux vecteurs non nuls ne peuvent pas à la fois être colinéaires et orthogonaux.

3.5. **Projection orthogonale.**

3.5.1. *Projection orthogonale sur une droite du plan.*

Proposition-Définition 19.
Le projeté orthogonal d'un point M du plan sur la droite $\mathscr{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$ est l'unique point H de $\mathscr{D}$ vérifiant :

$$H \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HM} \text{ est colinéaire à } \vec{n}.$$

Démonstration. La droite passant par M est dirigée par $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et donc sécante. Le point H en est le point d'intersection. ■

Propriété 20. *Le projeté orthogonal H de M sur la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'unique point H vérifiant :*

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}.$$

Démonstration. Soit H le point du plan défini par :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}.$$

Montrons que H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
Puisque $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, nécessairement $H \in \mathscr{D}$; il suffit donc de montrer que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{u}\\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

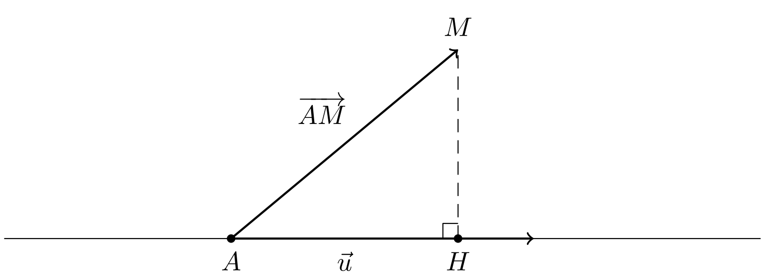
Or :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \times \|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$$

donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}\\ \Longrightarrow\ &\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0.\end{aligned}$$

■



Définition 20.
Le projeté orthogonal d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan sur une droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où A' et B' sont les projetés orthogonaux de A et B sur $\mathscr{D}$.

3.5.2. *Projection orthogonale sur un plan de l'espace.*

Proposition-Définition 21.
Le projeté orthogonal d'un point M de l'espace sur le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ est l'unique point H de $\mathscr{P}$ vérifiant :

$$H \in \mathscr{P} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HM} \text{ est colinéaire à } \vec{n}.$$

Démonstration. La droite passant par M est dirigée par $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$, elle l'intersecte donc en un seul point, qui est H. ■

Propriété 21.
Soit le plan $\mathscr{P} = (A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux. Le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est l'unique point H vérifiant :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}.$$

Démonstration. Soit H le point de $\mathscr{E}$ défini par :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}.$$

Montrons que H est le projeté orthogonal de M sur $(A, \vec{u}, \vec{v})$. Clairement $H \in \mathscr{P}$, il suffit donc de montrer que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = 0$.

On a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}$$

Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{u})}_{=0} \\ &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \times \|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} \implies \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0.$$

De même :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v}$$

Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{=0} + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \times \|\vec{v}\|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} \implies \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = 0.$$

■

Définition 22.
Le <u>projeté orthogonal d'un vecteur</u> $\overrightarrow{AB}$ de l'espace sur un plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où A' et B' sont les projetés orthogonaux de A et B sur $\mathscr{P}$.

3.6. Norme et distance ; équation d'un cercle du plan.

Définition 23.
Dans le plan ou l'espace rapporté à un repère orthonormé, la <u>distance AB</u> entre 2 points A et B est la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Propriété 22. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation :*

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

Démonstration. C'est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

$$\begin{aligned} AM = r &\iff \|\overrightarrow{AM}\| = r \\ &\iff \|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2 \\ &\iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \end{aligned}$$

■