Chapitre 26
Applications réelles de 2 variables réelles

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

1. Généralités

1.1. Définitions.

Définition 1.
On appelle application réelle de 2 variables réelles toute application f définie sur un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Définition 2.
Lorsque $f(x,y)$ est donnée par une expression réelle fonction des réels x et y on parle de fonction réelle de 2 variables réelles.
Son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $f(x,y)$ est bien définie.

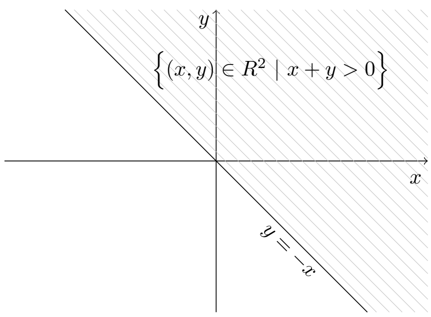
Une fonction réelle de 2 variables réelles définit une application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemple. La fonction $f(x,y) = x^2 \ln(x+y)$ est définie pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$x + y > 0 \iff y > -x$$

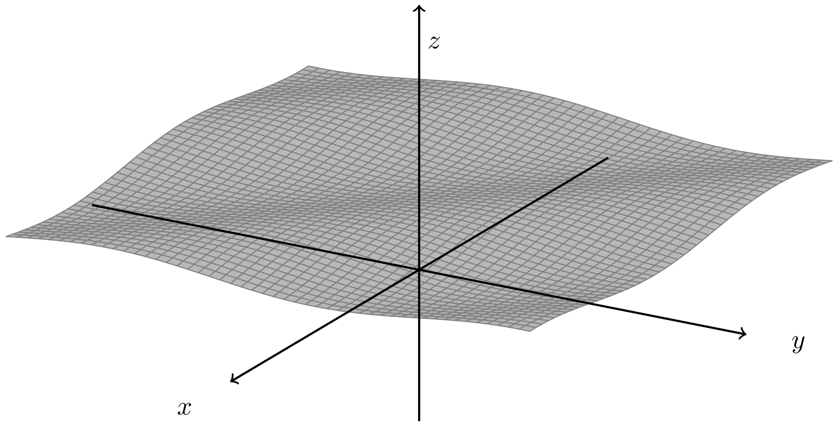
Son domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y>0\Big\}$.



Définition 3.
Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{G}_f = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathscr{D}_f \text{ et } z = f(x,y)\Big\}$$

On le représente dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; c'est la surface représentative de f.



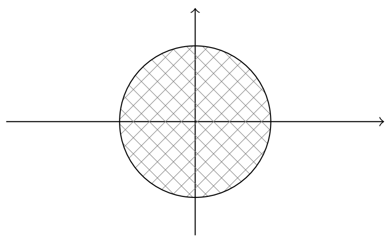
Exemple. Soit $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

$f(x, y)$ est défini ssi $1 - (x^2 + y^2) \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Ainsi :

$$\mathscr{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

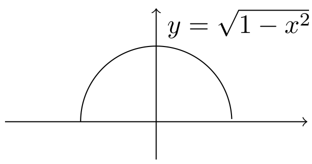
Dans le plan c'est l'intérieur du disque centré en l'origine et de rayon 1.



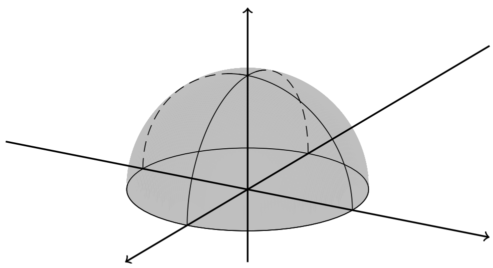
Surface représentative de f.

Pour le tracé on peut s'aider en traçant des courbes sur la surface, en se restreignant à des plans dans l'espace, ou au tracé au dessus de courbes du plan.

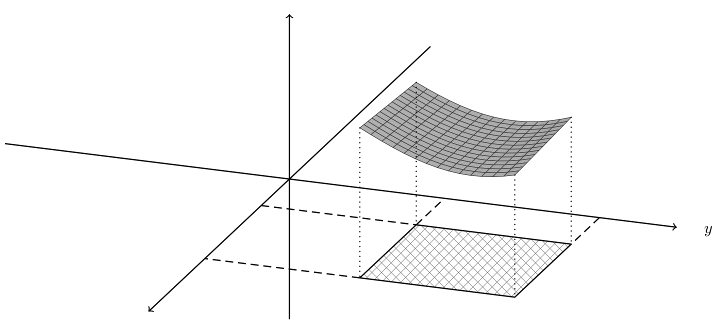
– Pour $y = 0$: $z = f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$.
– Pour $x = 0$: $z = f(0, y) = \sqrt{1 - y^2}$.
– Pour $x = y = 0$: $z = f(0, 0) = 1$.
– Pour $x^2 + y^2 = 1$: $z = f(x, y) = 0$.



La surface représentative de f est une demi-sphère :



Remarque. Souvent on restreint le domaine à des pavés de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire à des domaines de la forme $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.



1.2. Courbes de niveau.

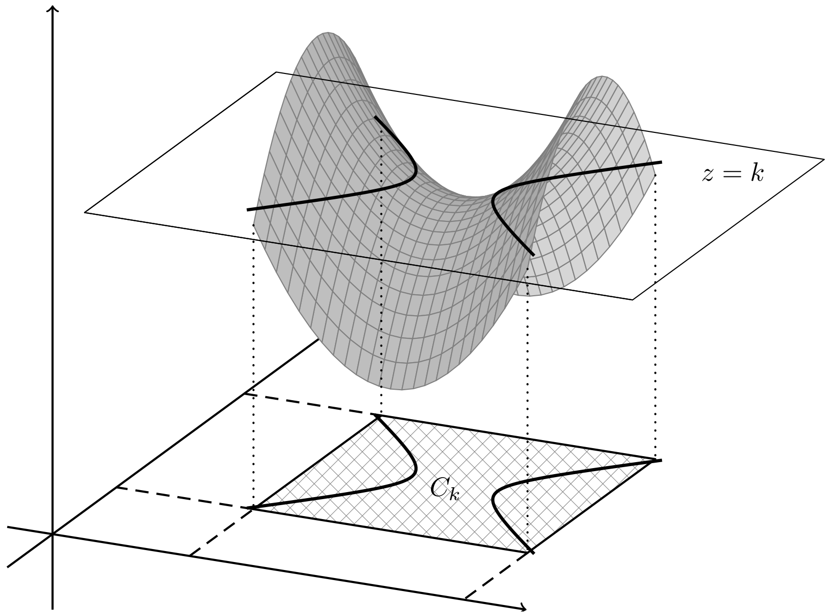
Définition 4. *Soit :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

et $k \in \mathbb{R}$. On appelle courbe de niveau k de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$C_k = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in \mathscr{D}_f \text{ et } f(x,y) = k\Big\}$$

Remarque. L'ensemble $C_k \times \{k\}$ est représenté dans l'espace par la courbe sur la surface représentative constituée de tous les points tels que $z = k$; la courbe de niveau k, par sa projection sur le plan $z = 0$.



2. Dérivées partielles

2.1. Fonctions partielles en (x_0, y_0).

Définition 5.
Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}_f$;
- *La première fonction partielle en (x_0, y_0) est :*

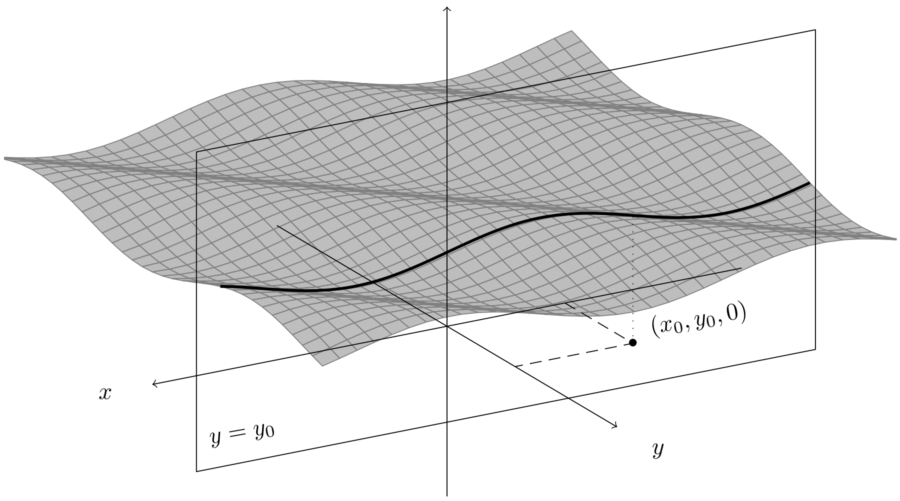
$$f_x : x \longmapsto f(x, y_0)$$

- *La seconde fonction partielle en (x_0, y_0) est :*

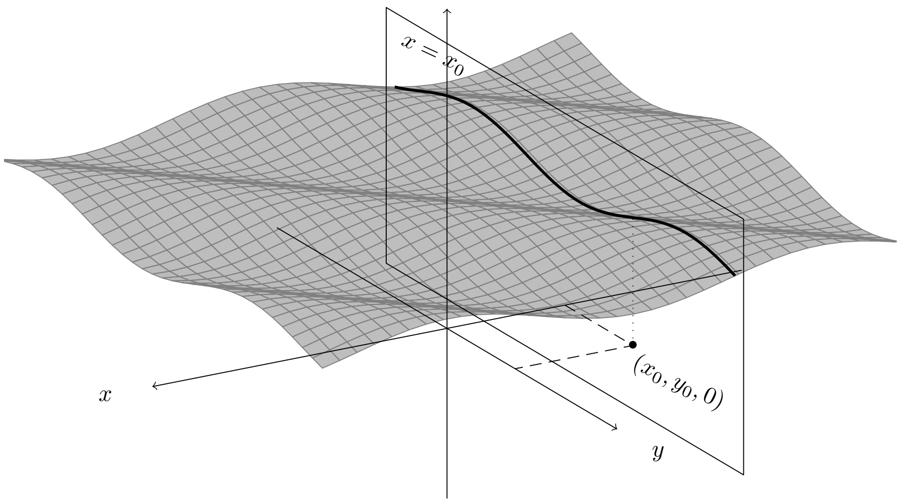
$$f_y : y \longmapsto f(x_0, y)$$

Remarque.
- La courbe représentative de la première fonction partielle en (x_0, y_0) s'obtient en intersectant la surface représentative de f avec le plan vertical $y = y_0$:
- La courbe représentative de la seconde fonction partielle en (x_0, y_0) s'obtient en intersectant la surface représentative de f avec le plan vertical $x = x_0$:

• Courbe de la première fonction partielle en (x_0, y_0) :



• Courbe de la seconde fonction partielle en (x_0, y_0) :



2.2. **Dérivées partielles.**

Définition 6.
Avec les mêmes notations ;
• *Si en (x_0, y_0), la première fonction partielle est dérivable en x_0, alors on appelle* *première dérivée partielle* *(ou dérivée partielle par rapport à x) en (x_0, y_0) le réel :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

• *Si en (x_0, y_0), la seconde fonction partielle est dérivable en y_0, alors on appelle* *seconde dérivée partielle* *(ou dérivée partielle par rapport à y) en (x_0, y_0) le réel :*

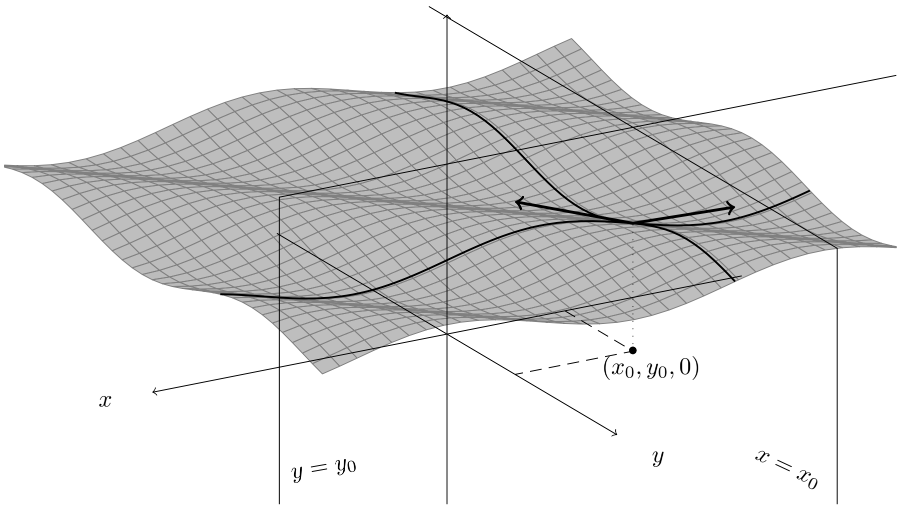
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

On dit alors que f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0).

Remarque. On a représenté la surface représentative, et :

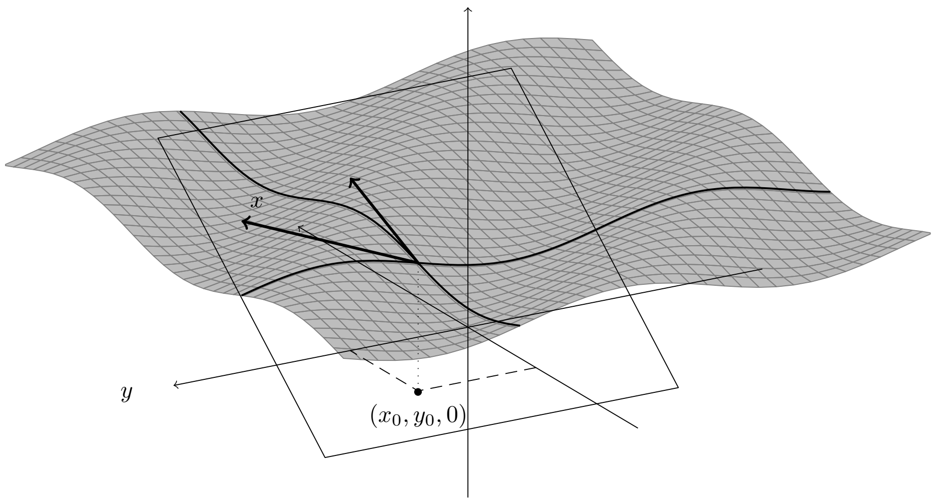
• Dans le plan $y = y_0$, la courbe de $z = f_x(x)$ et le vecteur : $(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$.

• Dans le plan $x = x_0$, la courbe de $z = f_y(y)$ et le vecteur : $(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$.



Lorsque f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0), sa surface représentative admet un plan tangent au point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Les deux vecteurs $(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ et $(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$ sont des vecteurs directeurs du plan tangent à la surface représentative au point M_0.



Plus précisément, lorsque h et k sont proches de 0 :

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) \underset{(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(\|(h,k)\|)}$$

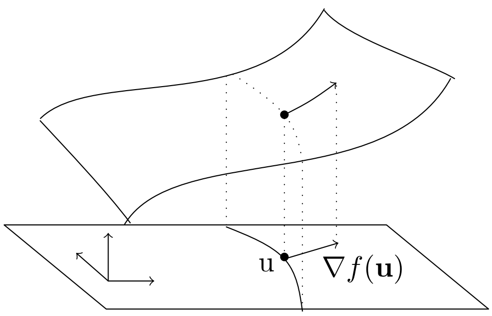
Le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation :

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + (x-x_0) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Définition 7.
Avec les mêmes notations, lorsque f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0), son <u>vecteur gradient</u> en (x_0, y_0) est le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque. On peut montrer que le vecteur gradient a les propriétés suivantes :
– C'est la direction de plus grande pente sur la surface représentative.
– Il est normal à la tangente au point (x_0, y_0) de la courbe de niveau $f(x_0, y_0)$.



(Ici on a noté $\mathbf{u} = (x_0, y_0)$.)

Définition 8.
Avec les mêmes notations ; si f admet des dérivées partielles en tout point (x_0, y_0) de $D \subset \mathbb{R}^2$, on définit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array}$$

la première fonction dérivée partielle, et

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

la seconde fonction dérivée partielle.

Remarque. Ce sont des fonctions réelles de deux variables réelles.

Le calcul des dérivées partielles procède des mêmes méthodes que le calcul des dérivées de fonctions d'une seule variable réelle. Notamment :

Propriété 1.
• *Si f et g admettent des dérivées partielles en tout point de $D \subset \mathbb{R}^2$, alors il en est de même de toute combinaison linéaire ou du produit de f et g et :*

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \times g) = \frac{\partial f}{\partial x} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}(f \times g) = \frac{\partial f}{\partial y} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial y}$$

• *Si f et g admettent des dérivées partielles en tout point de $D \subset \mathbb{R}^2$, et si g ne s'annule pas sur D, alors $\frac{f}{g}$ admet des dérivées partielles en tout point de $D \subset \mathbb{R}^2$ et :*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} \times g - f \times \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y} \times g - f \times \dfrac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$$

• *Soit $f : \mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point de $\mathscr{D}_f$ et si $g : \mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathscr{D}_g$; si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$, alors la composée :*

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(f(x,y)) \end{array}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathscr{D}_f$ et :

$$\frac{\partial}{\partial x}(g \circ f) = (g' \circ f) \times \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}(g \circ f) = (g' \circ f) \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

Démonstration. Ce sont les mêmes que pour des fonctions d'une seule variable réelle dérivables. Elles découlent toutes des opérations sur les limites (combinaison linéaire, produit, quotient, composition). ■

Exemples.

• Pour $f(x,y) = \cos(x \times y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto -\sin(x \times y) \times y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto -\sin(x \times y) \times x$$

• Pour $f(x,y) = xy \times \ln(x+y)$ définie sur $\mathscr{D}_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y>0\Big\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto y \times \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto x \times \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles de :

$$f(x,y) = \ln(\arctan(x^2+3y)).$$

Résolution.

3. Fonctions, continues, de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$

Définition 9.
Une application $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $(x,y) \in \mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ si pour toute suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in \mathscr{D}_f \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim x_n = x \\ \lim y_n = y \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim f(x_n,y_n) = f(x,y).$$

Une application $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $D \subset \mathscr{D}_f$ si elle est continue en tout $(x,y) \in D$.

Pour justifier de la continuité d'une application de deux variables réelles, on admettra les résultats suivants :

Propriété 2.

- *Si* $f : x \longmapsto f(x)$ *est continue sur* $\mathscr{D}_f$ *et* $g : x \longmapsto g(x)$ *est continue sur* $\mathscr{D}_g$ *alors* $(x,y) \longmapsto f(x)+g(y)$ *et* $(x,y) \longmapsto f(x)\times g(y)$ *sont continues sur* $\mathscr{D}_f \times \mathscr{D}_g$*.*

- *Toute combinaison linéaire, tout produit, d'applications continues sur* $D \subset \mathbb{R}^2$ *est continue sur* D*.*

- *Tout quotient d'applications continues sur* $D \subset \mathbb{R}^2$ *est continue sur* D *partout où il est défini.*

- *Si* $f : \mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$ *sont continues, et si* $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$*, alors la composée :*
$$g\circ f : \begin{array}{rcl} \mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(f(x,y)) \end{array}$$
est continue.

Dans tout ce qui suit, f est une application réelle de deux variables réelles :
$$f : \begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Définition 10.
On dit que <u>f *est de classe* $\mathscr{C}^1$</u> *sur* D *si* f *admet des dérivées partielles en tout point de* D *et si* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* D*.*

Les fonctions dérivées partielles étant elles-mêmes des fonctions réelles de 2 variables réelles, elles peuvent aussi admettre des dérivées partielles.

Définition 11.
Si f *admet des dérivées partielles en tout point de* D *et si* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *admettent aussi des dérivées partielles en tout point de* D*, on dit que* f *admet des* <u>*dérivées partielles secondes*</u> *sur* D *; on note :*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Les dérivées partielles secondes sont des fonctions réelles de 2 variables réelles.

Définition 12. *On dit que* f *est* <u>*de classe* $\mathscr{C}^2$</u> *sur* D *si elle y admet des dérivées partielles secondes, qui sont continues sur* D*.*

Théorème 3. (Théorème de Schwarz)
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors $\forall (x,y) \in D$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Démonstration. Admis.

Exemples.

• Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de $f(x,y) = x^3y^5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^5 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x^3y^4$$

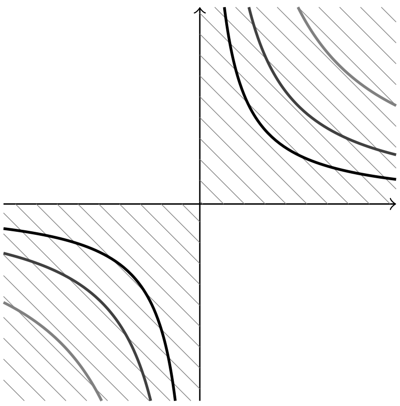
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 15x^2y^4$$

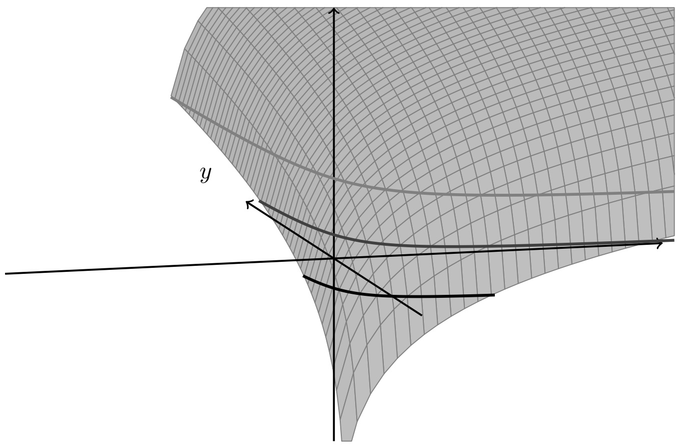
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 15x^2y^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 20x^3y^3$$

• Soit $f(x,y) = \ln(x \times y)$; déterminer son domaine de définition, le représenter dans le plan ainsi que quelques courbes de niveau. Représenter dans l'espace l'allure de sa surface représentative au dessus d'un domaine de $\mathbb{R}^2$.
Finalement, calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de f.

Le domaine de définition de f est : $\mathscr{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\}$.

La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ est l'hyperbole $y = \dfrac{e^k}{x}$.





$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{xy} \times y = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy} \times x = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

4. Extremum

Définition 13.
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$;
- *$(x_0, y_0) \in D$ est un minimum de f sur D si :*
$$\forall (x,y) \in D,\ \ f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$
- *$(x_0, y_0) \in D$ est un maximum de f sur D si :*
$$\forall (x,y) \in D,\ \ f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

Dans les deux cas (x_0, y_0) est un extremum de f sur D.

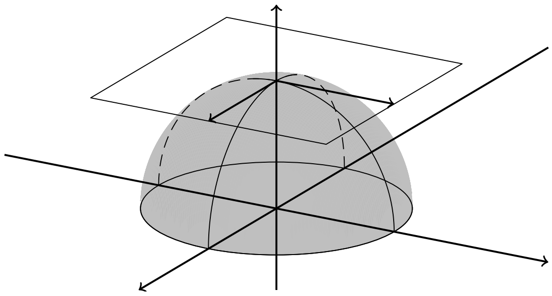
La recherche d'un extremum se ramène à la recherche des points critiques c'est-à-dire un point où les dérivées partielles s'annulent :

Théorème 4.
Soit $D =]a,b[\times]c,d[$ un pavé ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en tout point $(x,y) \in D$ et si (x_0, y_0) est un extremum de f sur D alors :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Démonstration. Considérons la première fonction partielle de f en (x_0, y_0) :
$$f_x : x \longmapsto f(x, y_0)$$
Elle est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. Puisque (x_0, y_0) est un extremum de f sur D, x_0 est un extremum de f_x sur $]a,b[$. En particulier :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0) = 0.$$
Considérons la seconde fonction partielle de f en (x_0, y_0) :
$$f_y : y \longmapsto f(x_0, y)$$
Elle est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert $]c,d[$ de $\mathbb{R}$. Puisque (x_0, y_0) est un extremum de f sur D, y_0 est un extremum de f_y sur $]c,d[$. En particulier :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(y_0) = 0.$$
∎

Exemple. Soit $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{1-(x^2+y^2)}$.

Elle admet un maximum au point $(0,0)$ puisque $\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f, f(x,y) \leqslant 1$ et $f(0,0) = 1$. Elle admet des dérivées partielles sur le pavé ouvert $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[\times]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, donc ses deux dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$
s'annulent en $(0,0)$.



Au point $(0,0,f(0,0))$ son plan tangent est horizontal.

Remarques.

• Attention ce n'est vrai que sur un pavé ouvert.

Par exemple sur le pavé fermé $[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=x+y$ admet un minimum au point $(0,0)$ et un maximum au point $(1,1)$ et pourtant $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1.$$

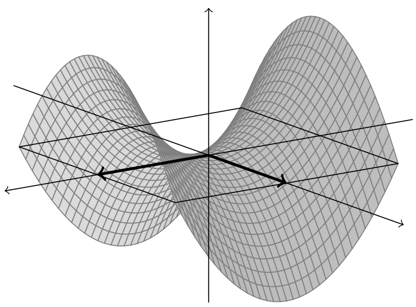
• C'est une condition nécessaire non suffisante.

Par exemple $f(x,y)=x^2-y^2$ a des dérivées partielles qui s'annulent en $(0,0)$ puisque :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \qquad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y$$

mais $(0,0)$ n'est pas un extremum puisque :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0)=+\infty \qquad ; \qquad \lim_{y\to+\infty} f(0,y)=-\infty$$



5. Application : droite de régression linéaire

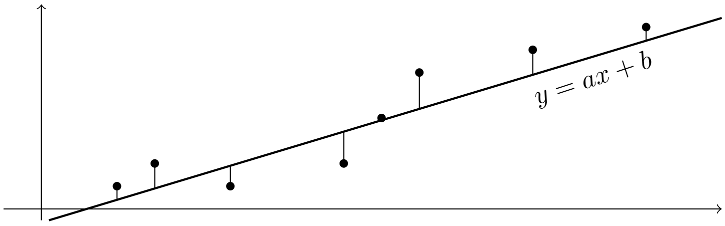
Soit $I=[\![1,n]\!]$ et une suite finie $(x_i,y_i)_{i\in I}$ de couples de réels, à laquelle on associe la suite finie de points $(M_i(x_i,y_i))_{i\in I}$ du plan rapporté à un repère orthonormé, appelé nuage de points. On suppose en outre que $\exists(i,j), x_i\neq x_j$ (les points du nuage ne sont pas alignés sur une droite verticale).

Problème : Trouver une droite d'équation $y=ax+b$ qui approche le mieux possible le nuage de points.

Au sens des moindres carrés, c'est-à-dire tel que :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2 \quad \text{soit minimal}$$

C'est la somme des carrés des distances de chaque point du nuage de point au point de la droite de même abscisse.



On admet l'existence d'un couple (a,b) tel que $\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$ soit minimal. La droite d'équation $y = ax + b$ est appelée la droite de régression linéaire. Exprimons a et b en fonction de $(x_i, y_i)_{i\in I}$.

Soit :

$$f : (a,b) \longmapsto f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$$

c'est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui admet en tout point (a,b) des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - (ax_i + b)) = 2 \times \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 - x_iy_i + x_ib$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - (ax_i + b)) = 2 \times \sum_{i=1}^{n} b - y_i + x_ia$$

En un extremum (a,b) : $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0$,

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & +b\sum_{i=1}^{n} x_i & = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i & +bn & = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right. \qquad (*)$$

C'est un système linéaire de deux équations à deux inconnues, de déterminant :

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Considérons la série statistique $x = (x_i)_{i\in I}$; sa moyenne est : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

$$\begin{aligned} \Delta &= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (n\overline{x})^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2(n\overline{x})^2 + (n\overline{x})^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n^2\overline{x}^2 = n \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2\right) \\ &= n \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2\right) = n \times \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2\right) \\ &= n \times \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > 0 \end{aligned}$$

puisque la série $x = (x_i)_{i\in I}$ n'est pas stationnaire égale à sa moyenne $\overline{x}$. Ainsi : $\Delta \neq 0$ et donc le système $(*)$ admet un unique couple solution, donné par les formules de

Cramer :

$$a = \frac{1}{\Delta} \times \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \frac{1}{\Delta} \times \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \end{array}}$$

(où toutes les sommes vont de $i = 1$ à n).

Ce sont les coefficients de la droite de régression linéaire.

Dans la suite nous simplifions cette formule en la reformulant à l'aide d'indicateurs statistiques. Considérons les séries statistiques :

$$x = (x_i)_{i=1\ldots n} \quad ; \quad y = (y_i)_{i=1\ldots n}$$

et notons leur moyenne :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

leur variance :

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \quad ; \quad V(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

et leur covariance :

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \times (y_i - \overline{y})$$

En notant :

$$x^2 = (x_i^2)_{i=1\ldots n} \quad ; \quad x \times y = (x_i \times y_i)_{i=1\ldots n}$$

On a les deux formules dites de Koenig-Huygens :

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

$$cov(x, y) = \overline{x \times y} - \overline{x} \times \overline{y}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} cov(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \times (y_i - \overline{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i - \overline{x} \cdot y_i - x_i \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \overline{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{y} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \overline{x} \cdot \overline{y} \\ &= \overline{x \times y} - \overline{x} \times \overline{y} - \overline{y} \times \overline{x} + \overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y} - \overline{x} \times \overline{y} \end{aligned}$$

D'autre part, clairement : $V(x) = cov(x,x)$ et donc :$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$. ■

Ainsi (les sommes vont toutes de $i = 1$ jusqu'à n) :

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ &= \frac{n^2\overline{xy} - n^2\overline{x}\cdot\overline{y}}{n^2\overline{x^2} - n^2\overline{x}^2} \\ &= \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ &\underset{K.H.}{=} \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ &= \frac{n\overline{x^2} \times n\overline{y} - n\overline{x} \times n\overline{xy}}{n^2\overline{x^2} - n^2\overline{x}^2} \\ &= \frac{\overline{x^2} \times \overline{y} - \overline{x} \times \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \overline{y} - a\overline{x} &= \overline{y} - \frac{\overline{xy} \times \overline{x} - \overline{x}^2 \times \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ &= \frac{\overline{y} \times \overline{x^2} - \overline{y} \times \overline{x}^2 - \overline{xy} \times \overline{x} + \overline{x}^2 \times \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ &= \frac{\overline{y} \times \overline{x^2} - \overline{xy} \times \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ &= b \end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu :

$$\boxed{a = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)} \qquad ; \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}}.$$