

Chapitre 2

Nombres réels

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/>

1. INTRODUCTION

On distingue dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, deux sous-ensembles remarquables :

- Le sous-ensemble des réels positifs, noté $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- Le sous-ensemble des réels négatifs, noté $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$$\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$$

Ils vérifient :

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par addition ; autrement dit :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, (x + y) \in \mathbb{R}_+ \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \forall y \in \mathbb{R}_-, (x + y) \in \mathbb{R}_-$
- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par multiplication par un réel positif ; autrement dit :
 $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, (a \times x) \in \mathbb{R}_+ \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_-, (a \times x) \in \mathbb{R}_-$
- La multiplication par un réel négatif envoie $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$; autrement dit :

$$\forall a \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_+, (a \times x) \in \mathbb{R}_- \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_-, (a \times x) \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi :

- $\mathbb{R}_+$ est stable par multiplication, $\mathbb{R}_-$ n'est pas stable par multiplication.

Notation. On a coutume d'écrire :

$\forall a \geq 0 \dots$	pour	$\forall a \in \mathbb{R}_+ \dots$
$\forall a > 0 \dots$	pour	$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \dots$
$\forall a \leq 0 \dots$	pour	$\forall a \in \mathbb{R}_- \dots$
$\forall a < 0 \dots$	pour	$\forall a \in \mathbb{R}_-^* \dots$

et de même avec le quantificateur existentiel.

2. ORDRE SUR LES RÉELS

On construit une relation d'ordre sur les réels.

Définition 1.

L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$, définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$a \leq b \text{ si et seulement si } a - b \in \mathbb{R}_-.$$

L'ordre est total :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

L'ordre sur les réels vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

Propriété 1.

- *Réflexivité* : $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$.
- *Anti-symétrie* : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
- *Transitivité* : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

Démonstration.

- Réflexivité : Soit $a \in \mathbb{R}$, $a - a = 0 \in \mathbb{R}_-$, donc $a \leq a$.
- Antisymétrie : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$ et $b \leq a$.

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a - b) \in \mathbb{R}_- \\ \text{et} \\ (b - a) \in \mathbb{R}_- \end{array} \right\} \implies (a - b) = (-1) \times (b - a) \in \mathbb{R}_+ \implies (a - b) \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}.$$

Donc $a - b = 0$, donc $a = b$.

- Transitivité : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $b \leq c$. Alors $(a - b) \in \mathbb{R}_-$ et $(b - c) \in \mathbb{R}_-$. Par addition, on a donc :

$$(a - b) + (b - c) = (a - c) \in \mathbb{R}_- \implies a \leq c.$$

■

Définition 2. On définit aussi, pour tous réels a et b :

$$a < b \text{ si et seulement si } a \leq b \text{ et } a \neq b$$

$$a \geq b \text{ si et seulement si } b \leq a$$

$$a > b \text{ si et seulement si } b \leq a \text{ et } b \neq a$$

Remarques.

- Ainsi : $a \leq b \iff (a < b \text{ ou } a = b)$ et la négation de $a \leq b$ est $b < a$.
- La notation $a \leq b \leq c$ signifie $a \leq b$ et $b \leq c$; $a \leq b < c$ signifie $a \leq b$ et $b < c$, etc.

Définition 3.

Les intervalles de $\mathbb{R}$, sont ses parties définies par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Remarque. L'intersection de deux intervalles est un intervalle. Réunion et complémentaire d'intervalles ne sont pas en général des intervalles.

Les opérations sur les réels ont les effets suivant sur leur ordre :

Propriété 2.

- $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c.$$

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout réel c strictement positif :

$$a \leq b \iff a \times c \leq b \times c$$

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout réel c strictement négatif :

$$a \leq b \iff b \times c \leq a \times c$$

- $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ c \leq d \end{cases} \implies a + c \leq b + d$$

- Pour tous réels a, b, c, d positifs,

$$\begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ c \leq d \end{cases} \implies a \times c \leq b \times d$$

- Pour tous réels a, b, c, d négatifs,

$$\begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ c \leq d \end{cases} \implies b \times d \leq a \times c$$

Démonstration. On les démontre dans l'ordre en appliquant la stabilité de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ par addition et par multiplication par un réel positif, et l'inversion de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ par multiplication par un réel négatif.

(1) On a : $a - b = (a + c) - (b + c)$ donc $a - b \in \mathbb{R}_- \iff (a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}_-$, donc par définition, $a \leq b \iff a + c \leq b + c$.

(2) Soit $c > 0$; alors $\frac{1}{c} > 0$ et :

$$\begin{aligned} a - b \in \mathbb{R}_- &\implies ca - cb \in \mathbb{R}_- \\ ca - cb \in \mathbb{R}_- &\xrightarrow{\times c} a - b \in \mathbb{R}_- \\ &\xrightarrow{\times 1/c} \end{aligned}$$

ainsi : $a - b \in \mathbb{R}_- \iff ca - cb \in \mathbb{R}_-$. Donc $a \leq b \iff ac \leq bc$.

(3) Soit $c < 0$; alors $\frac{1}{c} < 0$ et :

$$\begin{aligned} a - b \in \mathbb{R}_- &\xrightarrow{\times c} ca - cb \in \mathbb{R}_+ \implies cb - ca \in \mathbb{R}_- \\ cb - ca \in \mathbb{R}_- &\xrightarrow{\times 1/c} a - b \in \mathbb{R}_- \end{aligned}$$

Ainsi : $a - b \in \mathbb{R}_- \iff cb - ca \in \mathbb{R}_-$. Donc $a \leq b \iff bc \leq ac$.

(4) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, par définition $a - b \in \mathbb{R}_-$ et $c - d \in \mathbb{R}_-$, donc $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}_-$, ainsi $a + c \leq b + d$.

(5) Remarquons que si $c \geq 0$ alors $a \leq b \implies a \times c \leq b \times c$; en effet si $c > 0$ cela découle du point (2), et si $c = 0$ alors $a \times c = b \times c = 0$ et donc $a \times c \leq b \times c$. Ainsi, soient a, b, c, d des réels positifs :

$$\left. \begin{aligned} a \leq b &\xrightarrow{\times c} a \times c \leq b \times c \\ c \leq d &\xrightarrow{\times b} b \times c \leq b \times d \end{aligned} \right\} \implies a \times c \leq b \times d \quad \text{par transitivité}$$

(6) Remarquons que si $c \leq 0$ alors $a \leq b \implies b \times c \leq a \times c$; en effet si $c < 0$ cela découle du point (3), et si $c = 0$ alors $b \times c = a \times c = 0$ et donc $b \times c \leq a \times c$. Ainsi,

soient a, b, c, d des réels négatifs :

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \xRightarrow{\times d} b \times d \leq a \times d \\ c \leq d \xRightarrow{\times a} a \times d \leq a \times c \end{array} \right\} \implies b \times d \leq a \times c \quad \text{par transitivité} \quad \blacksquare$$

Remarque. Attention en multipliant les termes d'une inégalité par un réel positif (ou nul !), on ne conserve pas l'équivalence. On n'a que l'implication :

$$\text{si } c \geq 0 \text{ alors } (a \leq b \implies ac \leq bc).$$

Contre-exemple : $0 \times 2 = 0 \leq 0 = 0 \times 1$ mais l'on n'a pas $2 \leq 1$.

De-même en multipliant par un réel négatif :

$$\text{si } c \leq 0 \text{ alors } (a \leq b \implies bc \leq ac).$$

on ne conserve pas l'équivalence.

Exercice 1. Soient :

$$-1 \leq a \leq 2 \quad ; \quad 1 \leq b \leq 3$$

Encadrer (le plus finement possible) : $a + b, \quad a - b, \quad a \times b$.

Méthode. Attention :

- On a toujours le droit d'ajouter terme à terme deux inégalités.
- On n'a jamais le droit de soustraire terme à terme deux inégalités.
- On a le droit de multiplier terme à terme deux inégalités seulement lorsque tout est positif.

Propriété 3.

Deux nombres strictement positifs (respectivement strictement négatifs) sont rangés dans le sens contraire de leurs inverses :

$$\begin{aligned} 0 < a \leq b &\implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \\ a \leq b < 0 &\implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0 \end{aligned}$$

Remarque. Attention ça devient faux lorsque a et b ne sont pas de même signe : si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$, et donc :

$$a \leq b \text{ et } \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}.$$

Démonstration. Soient a et b non nuls et de même signe, avec $a \leq b$. Alors $ab > 0$ et donc $\frac{1}{ab} > 0$. Ainsi :

$$a \leq b \xLeftrightarrow{\times \frac{1}{ab}} a \times \frac{1}{ab} \leq b \times \frac{1}{ab} \xLeftrightarrow{\times \frac{1}{ab}} \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

De plus $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont nuls et de même signe que a et b . ■

Propriété 4.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et leurs racines carrées :

$$\text{si } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0, \text{ alors } (a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \iff a^2 \leq b^2).$$

Démonstration. Soient a et b deux réels positifs. Commençons par montrer que $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$. On montre deux implications :

⇒

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq a \leq b \end{array} \right\} \xRightarrow{\times} 0 \leq a^2 \leq b^2$$

⇐ Montrons la contraposée de $(a^2 \leq b^2 \implies a \leq b)$; soit $(b < a \implies b^2 < a^2)$. D'après ⇒ :

$$b < a \implies \begin{cases} b \leq a \\ \text{et} \\ b \neq a \end{cases} \implies \begin{cases} b^2 \leq a^2 \\ \text{et} \\ b \neq a \end{cases} \implies \begin{cases} b^2 < a^2 \text{ ou } b^2 = a^2 \\ \text{et} \\ b \neq a \end{cases}$$

Or puisque a et b sont positifs, $b^2 = a^2 \implies b = a$. Donc nécessairement $b^2 < a^2$.

Montrons maintenant que si a et b sont deux réels positifs, $a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans ce cas $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont bien définis et positifs. D'après ce que l'on vient de montrer, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(\sqrt{b})^2 = b$. Ainsi :

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

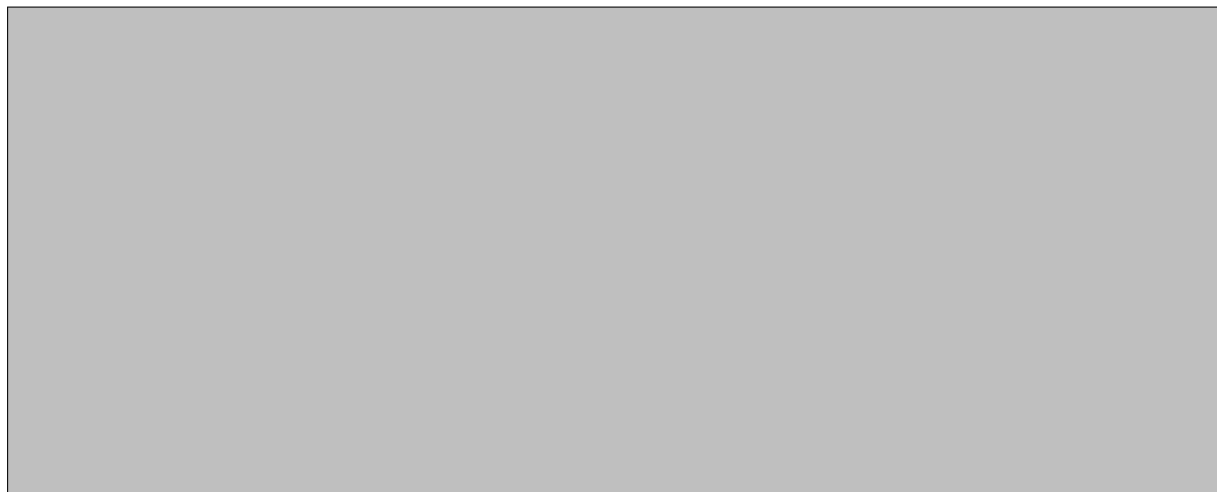
.

■

Exercice 2. Résoudre les inéquations :

$$(1) \quad \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1-x}$$

$$(2) \quad x \leq \sqrt{1-x}$$



3. VALEUR ABSOLUE - DISTANCE ENTRE 2 RÉELS

3.1. Valeur absolue.

Définition 4.

Pour tout réel x , la valeur absolue de x , notée $|x|$, est le réel positif défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque. C'est bien défini car $(x \geq 0 \text{ et } x \leq 0) \implies x = 0 \implies x = -x$.

La valeur absolue satisfait les propriétés :

Propriété 5.

Pour tous réels x, y :

- $|x| \geq 0$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Démonstration.

–? $|x| \geq 0$?. On considère deux cas :

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x \geq 0$. Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x \geq 0$.

–? $|x| = 0 \iff x = 0$?. On considère deux cas :

Soit $x \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$. Soit $x \leq 0$; $|x| = 0 \iff -x = 0 \iff x = 0$.

–? $|x \times y| = |x| \times |y|$?

On considère 4 cas en appliquant la règle des signes dans un produit :

Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $x \times y \geq 0$ et $|x \times y| = xy$ et $|x| \times |y| = xy$.

Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \times y \leq 0$ et $|x \times y| = -xy$ et $|x| \times |y| = x \times (-y) = -xy$.

Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $x \times y \leq 0$ et $|x \times y| = -xy$ et $|x| \times |y| = (-x) \times y = -xy$.

Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \times y \geq 0$ et $|x \times y| = xy$ et $|x| \times |y| = (-x) \times (-y) = xy$.

■

On a aussi les propriétés :

Propriété 6.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} |x| &= \max(x, -x) & ; & & -|x| \leq x \leq |x| \\ |x|^2 &= x^2 = (-x)^2 & ; & & \sqrt{x^2} = |x| \\ \forall r \geq 0, & |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r \\ \forall r > 0, & |x| < r \iff -r < x < r \end{aligned}$$

Démonstration. On les établit dans l'ordre de lecture.

(1) $|x| = \max(x, -x)$? On a :

$$\max(x, -x) = x \iff -x \leq x \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0.$$

Dans ce cas $|x| = x = \max(x, -x)$.

Dans le cas contraire, $x < 0$ et $\max(x, -x) = -x$, ainsi $|x| = -x = \max(x, -x)$.

Dans tous les cas $|x| = \max(x, -x)$.

(2) $-|x| \leq x \leq |x|$? On considère deux cas :

– Si $x \geq 0$ alors $-|x| = -x \leq 0 \leq x = |x|$ et donc $-|x| \leq x \leq |x|$ par transitivité.

– Si $x \leq 0$ alors $-|x| = x \leq 0 \leq -x = |x|$ et donc $-|x| \leq x \leq |x|$ par transitivité.

(3) $|x|^2 = x^2 = (-x)^2$? D'après la propriété 5 : $|x|^2 = |x^2| = |(-x)^2|$ et puisqu'un carré est positif, par définition $|x|^2 = x^2 = (-x)^2$.

(4) Démontré au chapitre 1 (paragraphe 2.3).

(5) $\forall r \geq 0, |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$? On a :

$$|x| \leq r \iff \begin{cases} x \geq 0 \text{ et } x \leq r \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ et } -x \leq r \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq r \\ \text{ou} \\ -r \leq x \leq 0 \end{cases} \iff -r \leq x \leq r$$

(6) La preuve est analogue en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte. ■

Exercice 3. Soit $r \geq 0$. Écrire sans valeur absolue l'assertion $|x| \geq r$.

Concernant la valeur absolue d'une somme ou d'une différence, on a l'encadrement suivant :

Théorème 7. Inégalité triangulaire.

Soient x, y deux réels :

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &\leq |x + y| \leq |x| + |y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer la première inégalité. Puisque tout est positif, élevons chaque terme au carré :

$$||x| - |y||^2 = (|x| - |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \times |y| = x^2 + y^2 - 2|xy|$$

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \times |y| = x^2 + y^2 + 2|xy|$$

puisque $|x|^2 = x^2$ et $|x| \times |y| = |xy|$ (propriétés 5, 6). Ainsi :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\iff ||x| - |y||^2 \leq |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

$$\iff -2|xy| \leq 2xy \leq 2|xy|$$

$$\iff -|xy| \leq xy \leq |xy|$$

ce qui est vrai d'après la propriété 6.

La deuxième inégalité en découle puisqu'en l'appliquant à x et $(-y)$:

$$||x| - |-y|| \leq |x + (-y)| \leq |x| + |-y|$$

$$\implies ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

■

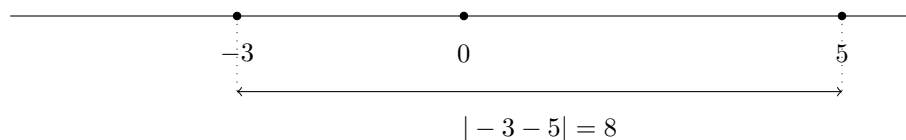
Exercice 4. Soient a et b tels que $1 \leq |a| \leq 2$ et $3 \leq |b| \leq 4$; encadrer $|a + b|$.

3.2. Distance entre 2 réels.

Définition 5.

La distance entre 2 réels x et y est le réel positif $|x - y|$.

Exemple.



Remarque. La distance entre deux réels satisfait les propriétés suivantes :

- $|x - y| = 0 \iff x = y$: la distance de x à y est nulle ssi $x = y$.
- $|x - y| = |y - x|$: les distances de x à y et de y à x sont égales.
- $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$: inégalité triangulaire.

3.3. Valeur absolue et intervalles.

Théorème 8.

Soient un réel x_0 , et $\varepsilon > 0$; on a les équivalences :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon \iff x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \iff x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Démonstration. Pour tout réel x , d'après la propriété 6 :

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x - x_0 \leq \varepsilon \xrightarrow{+x_0} x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

qui donne la première équivalence. La deuxième est analogue en changeant les inégalités larges par des inégalités strictes. ■

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. En posant $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, montrer que :

$$[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon \right\}$$

4. MAJORANT, MINORANT, BORNE SUPÉRIEURE, BORNE INFÉRIEURE

4.1. Partie majorée, minorée, bornée, de $\mathbb{R}$.**Définition 6.**

Soit A un sous-ensemble non-vidé de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est majoré lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in A, x \leq M$$

Le réel M est alors appelé un majorant de A .

- On dit que A est minoré lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in A, x \geq m$$

Le réel m est alors appelé un minorant de A .

Remarque.

– Lorsque A est majoré par M , tout réel $\geq M$ est aussi un majorant de A . Ainsi, si A admet un majorant, il en admet une infinité.

– Lorsque A est minoré par m , tout réel $\leq m$ est aussi un minorant de A . Ainsi, si A admet un minorant, il en admet une infinité.

Exemple. Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Tout élément de $\mathbb{R}_-$ est un minorant de A . Tout élément de $[1, +\infty[$ est un majorant de A .

Définition 7.

Un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ est dit borné lorsqu'il est à la fois majoré et minoré.

Exemple. $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est borné.

Propriété 9.

Un sous-ensemble A non-vide de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement si :

$$\exists r \geq 0, \forall x \in A, |x| \leq r$$

Démonstration. On montre deux implications.

$\Leftarrow$ Si $\forall x \in A, |x| \leq r$, alors $\forall x \in A, -r \leq x \leq r$, et donc A est majoré par r et minoré par $-r$: A est borné.

$\Rightarrow$ Soit A borné, et soient m un minorant, et M un majorant de A . Posons $r = \max(|m|, |M|)$. Alors :

$$|m| \leq r \implies -r \leq m \leq r$$

$$|M| \leq r \implies -r \leq M \leq r$$

Ainsi, pour tout $x \in A$:

$$-r \leq m \leq x \leq M \leq r \implies -r \leq x \leq r \implies |x| \leq r.$$

■

4.2. Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$.**Proposition-Définition 8.**

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A contient un élément M qui est majorant de A , alors cet élément est unique. Ce réel M est alors appelé le maximum de A et noté $M = \max(A)$. Ainsi :

$$M = \max(A) \iff (M \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq M).$$

- Si A contient un élément m qui est minorant de A , alors cet élément est unique. Ce réel m est alors appelé le minimum de A et noté $m = \min(A)$. Ainsi :

$$m = \min(A) \iff (m \in A \text{ et } \forall x \in A, x \geq m).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer l'unicité.

Supposons que A contiennent deux majorants M, M' . Alors puisque $M \in A, M \leq M'$ et puisque $M' \in A, M' \leq M$; donc par anti-symétrie, $M = M'$.

Supposons que A contiennent deux minorants m, m' . Alors puisque $m \in A, m \geq m'$ et puisque $m' \in A, m' \geq m$; donc par anti-symétrie, $m = m'$. ■

Remarque. Un ensemble admettant un maximum est majoré. Un ensemble admettant un minimum est minoré. Mais les réciproques sont fausses.

Par exemple $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est borné. Il admet pour maximum $1 = \frac{1}{1}$, et il est minoré mais n'admet aucun minimum. En effet, s'il admettait un minimum m , alors puisque $m \in A$, nécessairement $m = \frac{1}{a}$ pour $a \in \mathbb{N}^*$. Mais c'est contradictoire puisque $A \ni \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a} = m$.

Remarque. Toute partie finie non-vide de $\mathbb{R}$ est bornée, et admet un minimum ainsi qu'un maximum. En effet, indexons ses éléments dans l'ordre croissant :

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{avec} \quad a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

Alors a_1 est un minorant de A , et donc son minimum, et a_n est un majorant de A , et donc son maximum. On note $\min(a_1, \dots, a_n)$ et $\max(a_1, \dots, a_n)$ les minimum et maximum de l'ensemble fini $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

4.3. Borne supérieure, borne inférieure.

Proposition-Définition 9.

Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.

- *Si A est majoré, l'ensemble de ses majorants est un intervalle de la forme $[M, +\infty[$. Le réel M , est le plus petit des majorants de A , et on l'appelle la borne supérieure de A , noté $M = \sup(A)$.*
- *Si A est minoré, l'ensemble de ses minorants est un intervalle de la forme $]-\infty, m]$. Le réel m , est le plus grand des minorants de A , et on l'appelle la borne inférieure de A , noté $m = \inf(A)$.*

Preuve admise. C'est une propriété fondamentale des réels qui découle de sa construction. On pourra l'énoncer sous la forme d'un axiome :

Axiome de la borne supérieure.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- *Si A est majoré, A admet une borne supérieure notée $\sup(A)$; c'est le plus petit de ses majorants.*
- *Si A est minoré, A admet une borne inférieure notée $\inf(A)$; c'est le plus grand de ses minorants.*

Remarque.

- Le maximum de A , s'il existe, est aussi la borne supérieure de A . La réciproque est fausse.
- Le minimum de A , s'il existe, est aussi la borne inférieure de A . La réciproque est fausse.

4.4. Méthodes.

On a le schéma suivant : soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- A est majoré ?
 - Si NON : A n'est pas majoré ; A n'a ni maximum, ni borne supérieure.
 - Si OUI : A est majoré ; A admet une infinité de majorants et une unique borne supérieure notée $\sup(A)$. Dans ce cas :
 - $\sup(A) \in A$?
 - Si OUI : A admet aussi un maximum et $\max(A) = \sup(A)$.
 - Si NON : A n'admet pas de maximum.
- A est minoré ?
 - Si NON : A n'est pas minoré ; A n'a ni minimum, ni borne inférieure.
 - Si OUI : A est minoré ; A admet une infinité de minorants et une unique borne inférieure notée $\inf(A)$. Dans ce cas :
 - $\inf(A) \in A$?
 - Si OUI : A admet aussi un minimum et $\min(A) = \inf(A)$.
 - Si NON : A n'admet pas de minimum.

Remarque. Si A est un intervalle, disons de la forme $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$:

- A est majoré si et seulement si $b \in \mathbb{R}$; dans ce cas $\sup A = b$.
- A est minoré si et seulement si $a \in \mathbb{R}$; dans ce cas $\inf A = a$.
- A admet pour maximum b si et seulement si le crochet de droite est fermé.
- A admet pour minimum a si et seulement si le crochet de gauche est fermé.

Lorsque A n'est pas un intervalle :

Méthodes de démonstration :

- Comment montrer que A est majoré ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $M \in \mathbb{R}$ majorant de A , c'est-à-dire tel que $\forall x \in A, x \leq M$.

- Comment montrer que A est minoré ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $m \in \mathbb{R}$ minorant de A , c'est-à-dire tel que $\forall x \in A, x \geq m$.

- Comment montrer que A est borné ?

Soit on montre séparément que A majoré et minoré, soit on montre l'existence de $r \geq 0$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq r$.

- Comment montrer que A admet un maximum et le déterminer ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $M \in A$ majorant de A .

- Comment montrer que A admet un minimum et le déterminer ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $m \in A$ minorant de A .

- Soit A majoré. Comment déterminer $\sup(A)$?

Si $\max(A)$ existe, alors $\sup(A) = \max(A)$. Sinon :

On conjecture $M = \sup(A)$ pour un majorant M de A bien choisi. On montre ensuite par l'absurde que c'est le plus petit des majorants.

- Soit A minoré. Comment déterminer $\inf(A)$?

Si $\min(A)$ existe, alors $\inf(A) = \min(A)$. Sinon :

On conjecture $m = \inf(A)$ pour un minorant m de A bien choisi. On montre ensuite par l'absurde que c'est le plus grand des minorants.

Exemple. Soit : $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

– L'ensemble A est minoré par 0. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$.

– L'ensemble A est majoré par 1. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1.$$

– L'ensemble A est donc borné.

– $\max(A) = \sup(A) = 1$; en effet $1 \in A$ est un majorant de A .

– Montrons que $\inf(A) = 0$. On a vu que 0 est un minorant de A . Montrons par l'absurde que de tous les minorants, 0 est le plus grand.

Supposons donc qu'il existe $m > 0$ qui soit minorant de A . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < m \leq \frac{1}{n}$$

et donc en passant à l'inverse dans l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < n \leq \frac{1}{m}$$

Donc l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est majoré. Contradiction. Ainsi, $\inf(A) = 0$.

4.5. Application.

Nous terminons cette partie par le théorème suivant concernant les sous-ensembles majorés ou minorés de $\mathbb{Z}$. Il mérite d'être remarqué et nous sera utile dans la partie suivante.

Théorème 10.

Toute partie non vide A de $\mathbb{Z}$:

- *majorée admet un maximum,*
- *minorée admet un minimum.*

Démonstration. On l'établit pour une partie minorée, la preuve de l'autre cas est analogue.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$, qui soit minorée. C'est aussi une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, et d'après l'axiome de la borne supérieure $\inf(A)$ existe. Montrons que $\inf A \in A$. Par l'absurde :

Supposons que $\inf(A) \notin A$. Notons $m = \inf(A)$; alors $\forall a \in A, m \leq a$.

Puisque m est le plus grand minorant de A , $m + 1$ n'est pas un minorant de A et donc il existe $a_0 \in A$ tel que :

$$m < a_0 < m + 1$$

Puisque $m < a_0$, a_0 n'est pas un minorant de A . Et donc il existe $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$ tel que :

$$m < a_1 < a_0 < m + 1$$

En particulier, a_0 et a_1 sont des entiers tels que $a_0 - a_1 > 0$ et

$$\begin{cases} m < a_1 \\ a_0 < m + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -a_1 < -m \\ a_0 < m + 1 \end{cases} \implies a_0 - a_1 < 1$$

Ainsi $a_0 - a_1$ est un entier vérifiant :

$$0 < a_0 - a_1 < 1$$

ce qui est contradictoire puisqu'il n'existe aucun entier entre les deux entiers consécutifs 0 et 1. ■

5. PARTIE ENTIÈRE D'UN RÉEL

Proposition-Définition 10.

Pour tout réel x , il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n + 1$$

Cet entier est noté $[x]$ et appelé partie entière de x . Ainsi :

$$\underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}} \leq x < [x] + 1$$

Démonstration. Soit $A =]-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$; A est une partie de $\mathbb{Z}$, et A est non vide, car autrement $\mathbb{Z}$ serait minoré par x . De plus A est majoré par x .

D'après le théorème 10, A admet un maximum n . Puisque $n + 1 \in \mathbb{Z}$, et $n + 1 \notin A$,

nécessairement :

$$n \leq x < n + 1$$

D'où l'existence.

Montrons l'unicité en considérant deux entiers n et n' vérifiant :

$$\begin{cases} n \leq x < n + 1 \\ n' \leq x < n' + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 < n \leq x \\ x - 1 < n' \leq x \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 < n \leq x \\ -x \leq -n' < -x + 1 \end{cases}$$

et donc en sommant les deux inégalités : $-1 < n - n' < 1$. Or $n - n' \in \mathbb{Z}$ et donc $n - n' = 0$, c'est-à-dire $n = n'$. ■

Exemple.

$$\begin{aligned} \lfloor \pi \rfloor &= 3 \text{ car } 3 \leq \pi < 4 \\ \lfloor -\pi \rfloor &= -4 \text{ car } -4 \leq \pi < -3 \end{aligned}$$

Il s'en suit immédiatement :

Propriété 11.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathbb{Z} \iff \lfloor x \rfloor = x$$

Démonstration. Montrons deux implications.

($\Rightarrow$) Si $x \in \mathbb{Z}$, puisque $x \leq x < x + 1$ on a bien par définition $\lfloor x \rfloor = x$.

($\Leftarrow$) Si $\lfloor x \rfloor = x$, puisque par définition $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, nécessairement $x \in \mathbb{Z}$. ■

Exercice 6.

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$; exprimer $\lfloor x + n \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ et n .
- Soit $x \in \mathbb{R}$; exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

Propriété 12.

La partie entière de x est le plus grand entier $\leq x$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor.$$

Démonstration. Par l'absurde : supposons que $n \leq x$ et $\lfloor x \rfloor < n$. Alors :

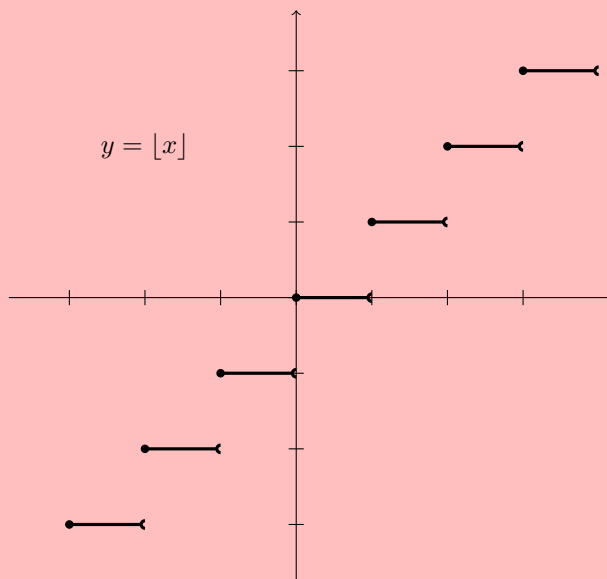
$$\lfloor x \rfloor < n \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor < n < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc n est un entier compris entre deux entiers consécutifs. C'est impossible. ■

Étudions maintenant la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Propriété 13.

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et croissante. Sa courbe représentative a l'allure suivante :



Elle a pour limite aux bornes et aux points de discontinuité :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor &= +\infty & ; & & \lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor &= -\infty \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor &= n - 1 & ; & & \lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor &= n \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons d'abord la croissance : soit $x \leq y$, alors

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \implies \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} < \underbrace{\lfloor y \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

Ensuite par définition, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$. D'où l'allure de la courbe.

Soit $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ et donc $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n$.

Soit $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ et donc $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$.

Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x$ on déduit avec le théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$.

Pour finir, de $x < \lfloor x \rfloor \leq x+1$ on déduit $x-1 < \lfloor x \rfloor$ et donc avec le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$. ■