

Chapitre 3

Trigonométrie

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/>

Notation. Pour 3 réels a, b, c , on écrit :

$$a \equiv b \ [c]$$

lu "a est congru à b modulo c", pour :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + k \cdot c.$$

Exemple.

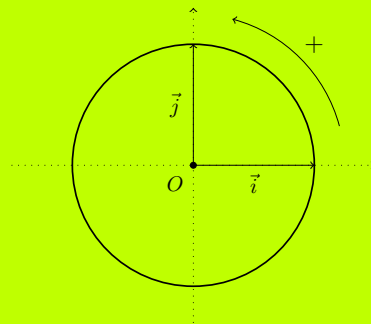
$$x \equiv \alpha \ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + 2k\pi.$$

1. DÉFINITIONS

1.1. Le cercle trigonométrique.

Définition 1.

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, muni d'une orientation dans le sens direct :

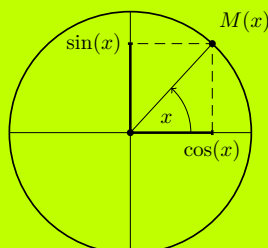


- À tout réel $x \in \mathbb{R}$, correspond un unique point M du cercle $\mathcal{C}$, tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \widehat{OM})$ soit congru à x modulo 2π :

$$(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv x \ [2\pi].$$

On appelle :

- cosinus de x , noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M ,
- sinus de x , noté $\sin(x)$, l'ordonnée du point M ,



Proposition-Définition 2.

Pour tout point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, il existe un unique réel x_0 dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$ tel que $(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv x_0 \pmod{2\pi}$.

Ce réel $x_0 \in] -\pi, \pi]$ est la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \widehat{OM})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{C}$ associé au réel x . On a par définition de la partie entière :

$$\begin{aligned}
 & \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \leq -\frac{x-\pi}{2\pi} < \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor + 1 \\
 \xRightarrow{\times(-1)} & -\left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor - 1 < \frac{x-\pi}{2\pi} \leq -\left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \\
 & \xRightarrow{+ \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor} -1 < \frac{x-\pi}{2\pi} + \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \leq 0 \\
 \xRightarrow{\times 2\pi} & -2\pi < x - \pi + 2\pi \times \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \leq 0 \\
 \xRightarrow{+\pi} & -\pi < x + 2\pi \times \underbrace{\left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leq \pi \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{=x_0}
 \end{aligned}$$

Ainsi $x_0 \in] -\pi, \pi]$ et $x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$; d'où l'existence.

Pour l'unicité, si l'on a $x_0, x_1 \in] -\pi, \pi]$ avec $x_0 \equiv x_1 \pmod{2\pi}$, alors :

$$\left. \begin{array}{l} -2\pi < x_1 - x_0 < 2\pi \\ x_1 - x_0 \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} -1 < \frac{x_1 - x_0}{2\pi} < 1 \\ \frac{x_1 - x_0}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \implies \frac{x_1 - x_0}{2\pi} = 0 \implies x_1 = x_0$$

■

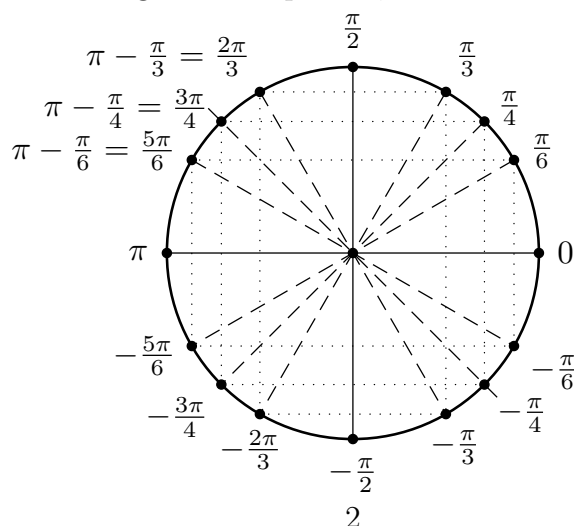
Remarque. Plus généralement : pour tout réel a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! x_0 \in]a, a + 2\pi], x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! x_0 \in [a, a + 2\pi[, x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$$

Remarque. Angles remarquables :

On a représenté tous les angles remarquables, et leur mesure principale :



Propriété 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin(x) \leq 1 & \quad ; \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\ \sin(x) = 0 &\iff x \equiv 0 \pmod{\pi} \quad ; \quad \cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) &= \cos(x) \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Un point $M(x)$ de coordonnées (x_M, y_M) sur le cercle $\mathcal{C}$ est à distance 1 de l'origine O , c'est-à-dire :

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = 1 \implies x_M^2 + y_M^2 = 1 \implies \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

puisque par définition, $x_M = \cos(x)$ et $y_M = \sin(x)$.

Ainsi, puisque $\cos^2(x) \geq 0$ et $\sin^2(x) \geq 0$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos^2(x) \leq 1 \implies -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \text{et} \\ \sin^2(x) \leq 1 \implies -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$$

On a $\sin(x) = 0$ si et seulement si $M \in (O, \vec{i})$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases} \iff \exists n \in \mathbb{Z}, x = n\pi \iff x \equiv 0 \pmod{\pi}$$

et $\cos(x) = 0$ si et seulement si $M \in (O, \vec{j})$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \iff \exists n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{2} + n\pi \\ &\iff x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Finalement pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x + 2k\pi \equiv x \pmod{2\pi}$ et donc $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$. ■

Définition 3.

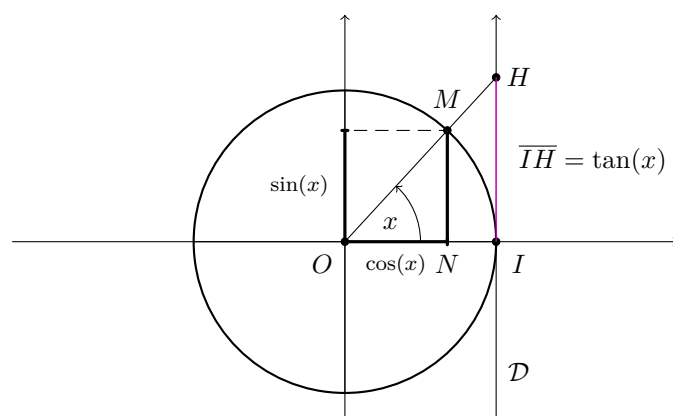
Soit x un réel, tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. On note $\tan(x)$, appelée tangente de x , le réel :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque. Interprétation géométrique de $\tan(x)$.

Soit $M(x)$ un point de $\mathcal{C}$. Notons $I(1, 0)$ le point de l'axe des abscisses tel que $\vec{OI} = \vec{i}$ et N le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse $\cos(x)$.

Considérons $\mathcal{D}$ la droite verticale passant par I , et H le point intersection des droites (OM) et $\mathcal{D}$; lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, (OM) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles, de sorte que leur point d'intersection H est bien définie.



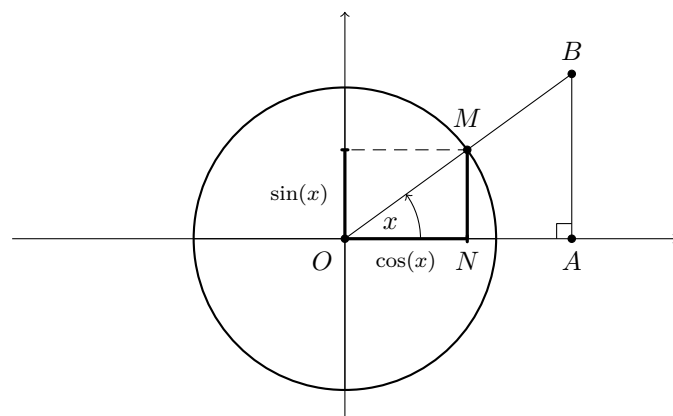
Alors O, N, I et O, M, H sont alignés dans cet ordre et $(NM) \parallel (IH)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{IH}{OI} = \frac{NM}{ON} \xrightarrow{OI=1} IH = \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} = |\tan(x)|$$

De plus le vecteur $\overrightarrow{IH}$ est de même sens que $\vec{j}$ si et seulement si $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont de même signe, si et seulement si $\tan(x) \geq 0$. Ainsi, une fois $\mathcal{D}$ muni d'une orientation vers le haut, $\tan(x)$ est la longueur algébrique $\overline{IH}$ (comptée positivement vers le haut, négativement vers le bas).

Remarque. Interprétation géométrique de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ dans un triangle rectangle.

Soit OAB un triangle rectangle en A , d'angle au sommet O : $x = \widehat{AOB}$.



Alors :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{\text{côté oppoSé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{OB} \\ \cos(x) &= \frac{\text{côté adjaCent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OA}{OB} \\ \tan(x) &= \frac{\text{côté oppoSé}}{\text{côté adjaCent}} = \frac{AB}{OA} \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans les triangles ONM et OAB .

1.2. Valeurs remarquables.

Propriété 2.*Tableau des valeurs remarquables*

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$

Démonstration. Pour un réel x , on note $M(x)$ le point du cercle trigonométrique correspondant, C son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, S son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées, et I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Lorsque $x \in [0, \pi/2]$, par définition $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont positifs, ainsi :

$$OS = \sin(x) \quad ; \quad OC = \cos(x) \quad ; \quad OI = OJ = OM = 1.$$

- Pour $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

D'après la propriété 1, on a $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = \sqrt{1 - 0^2} = 1$, donc $\tan(0) = 0$.

On a aussi $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{1 - 0^2} = 1$; $\tan$ n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.

- Pour $x = \pi/3$.

Le triangle OMI est isocèle en O puisque $OM = OI$ et il a un angle au sommet $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral.

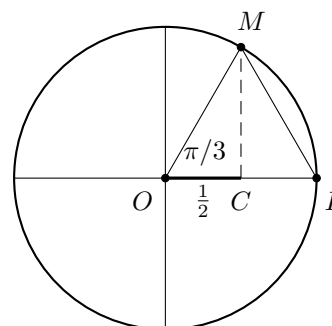
Sa hauteur $[MC]$ issue de M est donc aussi sa médiane.

$$\text{Donc } \cos(x) = OC = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}.$$

De $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\sin(x) \geq 0$, on en retire :

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et donc } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3}.$$



- Pour $x = \pi/6$.

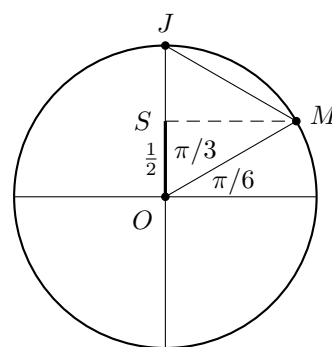
Le triangle OMJ est isocèle en O , puisque $OM = OJ$ et il a un angle au sommet $\widehat{MOJ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral. Sa hauteur $[MS]$ issue de M est donc aussi sa médiane.

$$\text{Donc } \sin(x) = OS = \frac{OJ}{2} = \frac{1}{2}.$$

De $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos(x) \geq 0$, on en retire :

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et donc } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



- Pour $x = \pi/4$.

Le rectangle $OCMS$ a une diagonale $[OM]$ qui est bissectrice de l'angle au sommet $\widehat{SOC}$ puisque :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{COM} + \widehat{MOS} = \frac{\pi}{2} \\ \widehat{COM} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \implies \widehat{COM} = \widehat{MOS} = \frac{\pi}{4}.$$

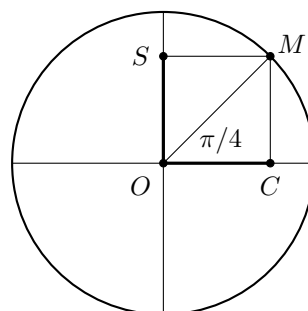
Le quadrilatère $OCMS$ est donc un carré. Ainsi $OC = OS$ soit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \implies 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \implies \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{et } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1.$$



2. FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

Pour calculer les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ en d'autres valeurs de x , on tente de se ramener aux valeurs remarquables en appliquant les formules qui suivent.

2.1. Formules de symétrie.

Les formules qui suivent découlent de symétries remarquables du cercle trigonométrique.

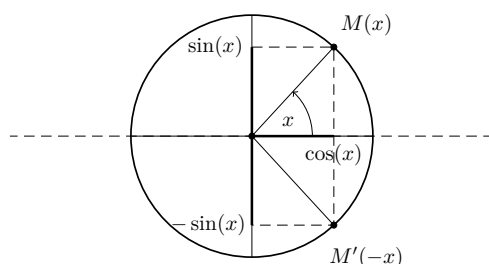
Propriété 3.

Pour tout réel x , lorsque bien définies :

- (i) $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$; $\tan(-x) = -\tan(x)$.
- (ii) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$; $\tan(\pi + x) = \tan(x)$.
- (iii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Démonstration.

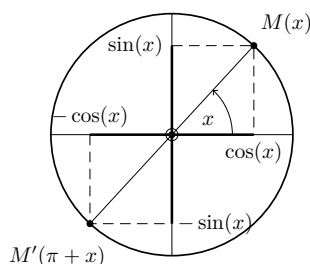
(i). La symétrie d'axe $(O, \vec{i})$ envoie le point $M(x_M, y_M)$ sur $M'(x_M, -y_M)$ et change le point $M(x)$ du cercle trigonométrique en $M'(-x)$.



Ainsi par définition :

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \implies \tan(-x) = -\tan(x).$$

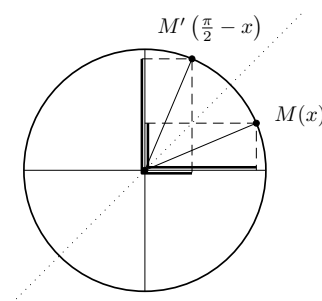
(ii). La symétrie de centre O envoie le point $M(x_M, y_M)$ sur $M'(-x_M, -y_M)$ et change le point $M(x)$ du cercle trigonométrique en $M'(\pi + x)$.



Ainsi par définition :

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \quad ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x) \quad \implies \tan(\pi + x) = \tan(x).$$

(iii). La symétrie d'axe $(O, \vec{i} + \vec{j})$ envoie le point $M(x_M, y_M)$ sur $M'(y_M, x_M)$ et change le point $M(x)$ du cercle trigonométrique en $M'(\frac{\pi}{2} - x)$.



Ainsi par définition :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \implies \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

■

On en déduit facilement les formules supplémentaires :

Corollaire 4.

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin(x) \quad ; \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \quad ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= \cos(\pi + (-x)) = -\cos(-x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(\pi + (-x)) = -\sin(-x) = \sin(x) \\ \tan(\pi - x) &= \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

■

Exercice 1. Compléter la tableau des valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0				
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$				
x	0	$-\pi/6$	$-\pi/4$	$-\pi/3$	$-\pi/2$	$-2\pi/3$	$-3\pi/4$	$-5\pi/6$	$-\pi$
$\sin(x)$									
$\cos(x)$									
$\tan(x)$									

2.2. Formules d'addition et de duplication.

Propriété 5.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

Démonstration. On commence par établir le développement de $\cos(a - b)$ dont on déduira les 3 autres formules. Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points du cercle trigonométrique. Alors :

$$(\vec{i}, \widehat{OA}) = a \quad ; \quad (\vec{i}, \widehat{OB}) = b$$

et d'après la relation de Chasles :

$$(\widehat{OB}, \widehat{OA}) = (\widehat{OB}, \vec{i}) + (\vec{i}, \widehat{OA}) = -(\vec{i}, \widehat{OB}) + (\vec{i}, \widehat{OA}) = a - b$$

Formons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} &= \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a) \\ &= OB \times OA \times \cos \left((\widehat{OB}, \widehat{OA}) \right) \\ &= \cos(a - b) \end{aligned}$$

D'où $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.

En appliquant cette formule à a et $(-b)$ avec $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$:

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

En utilisant la transformation $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$:

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\end{aligned}$$

En appliquant cette formule à a et $(-b)$ avec $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$:
 $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$. ■

Remarque. On peut condenser ces formules sous la forme :

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Exercice 2.

1) Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Que remarquez vous ? Est-ce étonnant ?

2) Calculer les cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{12}$:

On déduit des formules d'addition, les formules de duplication :

Propriété 6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a)\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première :

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin(a) \cos(a) + \sin(a) \cos(a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

Pour la seconde :

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a) \cos(a) - \sin(a) \sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

Puis en utilisant $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) + \sin^2(a) - 2 \sin^2(a) = 1 - 2 \sin^2(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

■

Exercice 3. Exprimer en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$:

$$\sin(4a)$$

$$\cos(4a)$$

Exercice 4. Montrer que pour tout réels a, b , lorsque bien définies :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

3. APPLICATION : TRANSFORMATION D'EXPRESSIONS TRIGONOMETRIQUES

On considère une expression de la forme :

$$E = a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$$

pour a, b et θ trois réels non nuls donnés. Nous allons voir comment elle peut toujours s'écrire sous la forme :

$$K \times \cos(\theta \pm \varphi) \quad \text{ou} \quad K \times \sin(\theta \pm \varphi).$$

Puisque a et b sont non nuls, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, et donc :

$$E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \sin(\theta) \right)$$

Or :

$$0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2 \implies 0 \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies 0 \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

$$0 \leq b^2 \leq a^2 + b^2 \implies 0 \leq \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies 0 \leq |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

Ainsi :

$$-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

considérons un point $M(\phi)$ du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; c'est possible d'après l'inégalité précédente. Alors :

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \\ &\implies \sin(\varphi) = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Quitte à changer φ en $-\varphi$, on a donc l'existence de $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{a^2 + b^2} \times (\cos(\varphi) \times \cos(\theta) + \sin(\varphi) \times \sin(\theta)) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

on a obtenu la forme souhaitée.

Remarques. On aurait pu tout aussi bien choisir φ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(\theta + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(\theta + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(\theta - \varphi)$$

Méthode. Lorsque l'on peut déterminer φ , cette méthode permet de transformer toute expression de la forme $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$ en $K \times \cos(\theta \pm \varphi)$ ou $K \times \sin(\theta \pm \varphi)$.

En Physique : la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence est un signal sinusoïdal, de même fréquence et déphasé ; φ est le déphasage.

Exemple. Écrire $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ sous la forme $K \times \cos(\theta + \varphi)$.

$$\begin{aligned}\cos(\theta) + \sin(\theta) &= \sqrt{1^2 + 1^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \right) \\ &= \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(\theta) \right) \\ &= \sqrt{2} \times \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Exercice 5. Écrire $E = \sqrt{3} \sin(x) - \cos(x)$ sous la forme $K \times \sin(x + \varphi)$.

4. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

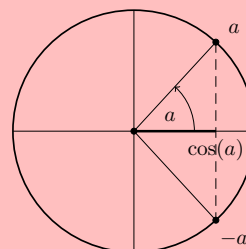
Nous admettrons pour l'instant les résultats de cette partie. On pourra les démontrer plus tard.

Pour la résolution d'équations, la propriété suivante est fondamentale :

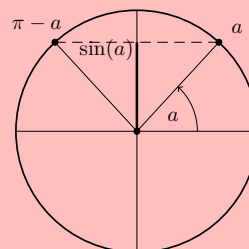
Propriété 7.

Soit $a \in \mathbb{R}$; alors :

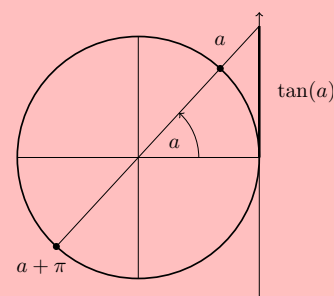
$$\cos(x) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$$



$$\sin(x) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$



$$\tan(x) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + k\pi$$



Exercice 6. Résoudre les équations :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{3} \quad (2)$$

Lorsque le second membre de l'équation n'est pas une valeur remarquable, on peut utiliser les notations suivantes :

Proposition-Définition 4.

- Pour tout $a \in [-1, 1]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, \pi]$. Cette solution est notée $\arccos(a)$.
- Pour tout $a \in [-1, 1]$, l'équation $\sin(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette solution est notée $\arcsin(a)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cette solution est notée $\arctan(a)$.

Exemple. Résoudre l'équation :

$$\cos(2x) = \frac{1}{4} \quad (E)$$

$$(E) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} 2x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{4} \right) + k\pi, -\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{4} \right) + k\pi \right\}.$$