Chapitre 4
Fonctions réelles usuelles

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Nous revoyons dans ce chapitre les fonctions réelles usuelles : la plupart ont deja été étudiées au Lycée, mais nous étudions aussi quelques nouvelles fonctions.

La plupart des résultats seront admis pour l'instant. Leur démonstration est repoussée à des chapitres ultérieurs au second semestre, une fois définis rigoureusement les limites de fonctions, la continuité et la dérivabilité.

1. Étude de fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1.1. Ensemble de définition.

Définition 1.
- *Une fonction réelle à valeur réelle, ou plus simplement fonction consiste en la donnée pour chaque réel x d'au plus un réel noté $f(x)$ et appelé image de x par f.*
- *L'ensemble des réels x ayant une image $f(x)$ par f est le domaine de définition de f ou ensemble de définition de f ; il est noté :*

$$\mathscr{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\right\}$$

Exemple.
Une fonction est souvent donnée par une expression réelle de x obtenue à l'aide des opérations algébriques, et éventuellement d'autres fonctions.

– Par exemple :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$$

définit la fonction f aussi notée $x \longmapsto f(x)$. Le réel $f(x)$ est défini pour tout réel x pour lequel cette expression est licite, c'est à dire exactement lorsque $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, c'est à dire lorsque $x \neq 1$ et 2 :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{1, 2\right\}.$$

– La fonction *tan* est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; elle est définie exactement lorsque $\cos(x) \neq 0$, c'est à dire $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

Méthode. Lors d'une étude de fonction, la première chose à faire est de déterminer son ensemble de définition !

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad ; \quad g : x \longmapsto \tan\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad h : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

1.2. Courbe représentative ; image directe.

Définition 2.
La <u>*courbe représentative*</u> *de* f*, noté* $\mathscr{C}_f$ *est définie par l'ensemble des points du plan dont les coordonnées décrivent l'ensemble :*

$$\Big\{(x, f(x)) \mid x \in \mathscr{D}_f\Big\}$$

appelé <u>*graphe de* f</u>*.*

Définition 3.
L'<u>*image directe*</u> *d'une fonction* f *est l'ensemble :*

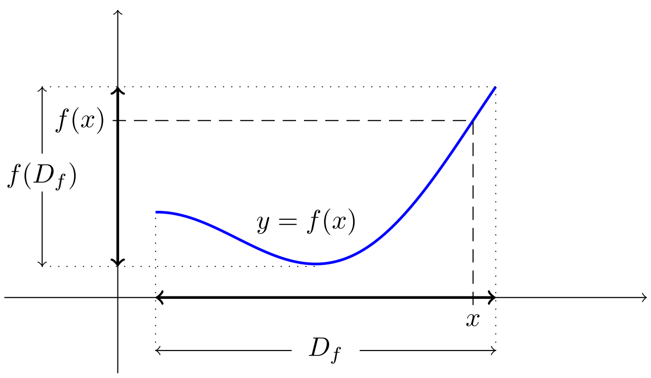
$$f(\mathscr{D}_f) = \{f(x) \mid x \in \mathscr{D}_f\}$$

C'est l'ensemble des ordonnées des points de $\mathscr{C}_f$*.*

Si I *est un intervalle inclus dans* $\mathscr{D}_f$*,* <u>*l'image directe de* I *par* f</u> *est l'ensemble :*

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$

Remarque. Courbe représentative de f ; $\mathscr{D}_f$ se lit sur l'axe des abscisses, et $f(\mathscr{D}_f)$ sur l'axe des ordonnées.



Exercice 2. Tracer l'allure des courbes représentatives de :

$$x \longmapsto x + \frac{1}{x} \qquad ; \qquad x \longmapsto \cos(x) + \sin(x)$$

sans procéder à l'étude des fonctions mais en vous aidant des courbes de $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \cos(x)$.

1.3. **Parité, imparité.**

Définition 4.

• *Une fonction f est paire si :*

– *$\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, i.e. $x \in \mathscr{D}_f \iff (-x) \in \mathscr{D}_f$, et*

– *$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.*

• *Une fonction f est impaire si :*

– *$\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, i.e. $x \in \mathscr{D}_f \iff (-x) \in \mathscr{D}_f$, et*

– *$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$.*

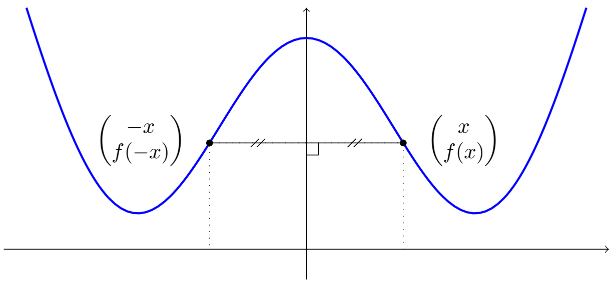
Exemples.
$x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^4$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^4}$, cos, sont quatres fonctions paires.
$x \longmapsto x^5$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$, sin, sont quatres fonctions impaires.

Remarque. Lors de l'étude d'une fonction paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. La courbe représentative de la fonction sur $\mathscr{D}_f$ se déduit de celle sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ par symétrie, à l'aide du résultat suivant :

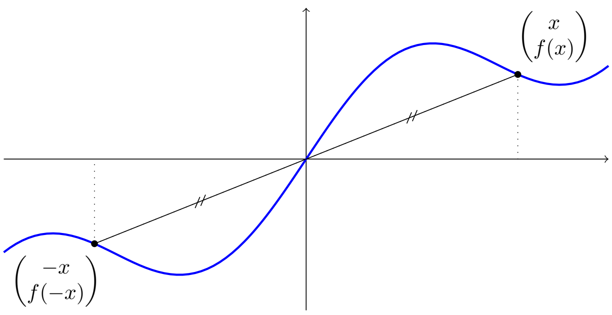
Propriété 1.
- *Si f est paire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *Si f est impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration. La symétrie d'axe la droite $x = 0$ envoie le point de coordonnées (x, y) sur celui de coordonnées $(-x, y)$. Ainsi si $M \in \mathscr{C}_f$, $M(x, f(x))$ est envoyé sur le point de coordonnées $(-x, f(x)) = (-x, f(-x))$ puisque f est paire, c'est à dire sur un point de $\mathscr{C}_f$.
La symétrie de centre O envoie le point de coordonnées (x, y) sur celui de coordonnées $(-x, -y)$. Ainsi si $M \in \mathscr{C}_f$, $M(x, f(x))$ est envoyé sur le point de coordonnées $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$ puisque f est impaire, c'est à dire sur un point de $\mathscr{C}_f$. ■

Remarque.
- Courbe représentative d'une fonction paire :



- Courbe représentative d'une fonction impaire :



1.4. Périodicité.

Définition 5.
Une fonction f est <u>périodique de période T</u> (ou <u>T-périodique</u>) si pour tout $x \in \mathbb{R}$:
– $x \in \mathscr{D}_f \iff x + T \in \mathscr{D}_f$, *et*
– $f(x + T) = f(x)$.

Exemples.
• cos et sin sont des fonction 2π-périodiques puisque définies sur $\mathbb{R}$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$..
• tan est π-périodique. En effet :

$$x \in \mathscr{D}_{\tan} \iff x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x+\pi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x+\pi \in \mathscr{D}_{\tan}.$$

et :

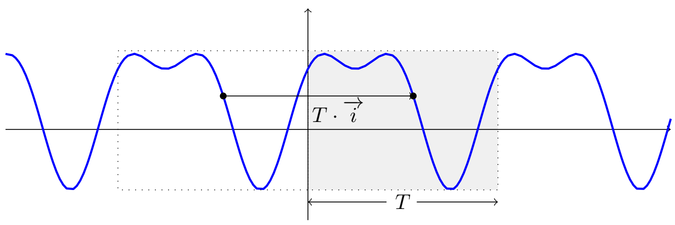
$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Remarque.
• Dans l'étude d'une fonction T-périodique, on peut réduire l'étude sur un ensemble de la forme $\mathscr{D}_f \cap [0,T]$ ou $\mathscr{D}_f \cap [a, a+T]$ pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque.
• Dans l'étude d'une fonction T-périodique et paire/impaire, on peut réduire l'étude sur un ensemble de la forme $\mathscr{D}_f \cap [0, T/2]$.
La courbe représentative de f s'obtient alors grâce au résultat :

Propriété 2.
Si f est T-périodique, la courbe de x est invariante par translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$. Autrement dit :

$$M\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix} \in \mathscr{C}_f \iff M'\begin{pmatrix} x+T \\ f(x)\end{pmatrix} \in \mathscr{C}_f$$

Remarque.
• Courbe représentative d'une fonction périodique :



Méthode. Dans l'étude d'une fonction, la deuxième chose à faire, est la réduction du domaine d'étude (parité, imparité, périodicité) si possible.

1.5. Opérations algébriques sur les fonctions.

Définition 6.
Soient f et g deux fonctions ; on définit :

$$f+g : x \longmapsto f(x)+g(x) \quad ; \quad f \times g : x \longmapsto f(x) \times g(x) \quad ; \quad \frac{f}{g} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

pour tout réel λ :

$$\lambda f : x \longmapsto \lambda \times f(x).$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f^n : x \longmapsto [f(x)]^n$$

Remarque.
– λf a pour ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

– $f+g$ et $f\times g$ ont pour ensemble de définition $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.
– $\frac{f}{g}$ a pour ensemble de définition :

$$\mathscr{D}_{\frac{f}{g}} = \mathscr{D}_f \cap \big\{x \in \mathscr{D}_g \mid g(x) \neq 0\big\}.$$

– f^n a pour ensemble de définition :

$$\begin{cases} \mathscr{D}_f & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \big\{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \neq 0\big\} & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$$

Exemple. $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \big\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\big\} = \mathbb{R} \setminus \big(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big)$.

Une opération très utile est la composition de fonctions :

Définition 7. *Soient f et g deux fonctions ; la composée de f suivie de g, notée $g \circ f$ est la fonction :*

$$g \circ f : x \longmapsto g(f(x)).$$

Propriété 3.
• *La somme $f+g$ de deux fonctions paires (resp. impaires, resp. T-périodique) est paire (resp. impaire, resp. T-périodique).*
• *Le produit $f \times g$ ou quotient $\frac{f}{g}$ de deux fonctions paires (resp. impaires, resp. T-périodiques) est paire (resp paire, resp. T-périodique).*
• *Le produit $f \times g$ ou quotient $\frac{f}{g}$ de deux fonctions, l'une paire, l'autre impaire, est impaire.*
• *La composée $g \circ f$ de deux fonctions impaires est impaire.*
• *Si f est paire (resp. T-périodique) alors $g \circ f$ est paire (resp. T périodique).*

Démonstration. Elles s'obtiennent directement par le calcul. En guise d'exemple montrons la cas d'une composition $g \circ f$.
• Si f et g sont impaires. Soit $x \in \mathscr{D}_{g\circ f}$; alors $f(x)$ et $g \circ f(x) = g(f(x))$ sont définis ; par imparité de f et g : $f(-x) = -f(x)$ et $g \circ f(-x) = g(-f(x))$ sont définis et :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

Donc $g \circ f$ est impaire.

• Si f est paire. Soit $x \in \mathscr{D}_{g\circ f}$; alors $f(x)$ et $g \circ f(x) = g(f(x))$ sont définis ; par parité de f : $f(-x) = f(x)$ et $g \circ f(-x) = g(f(x))$ sont définis et :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Donc $g \circ f$ est paire.

• Si f est T-périodique. Soit $x \in \mathscr{D}_{g\circ f}$; alors $f(x)$ et $g \circ f(x) = g(f(x))$ sont définis ; par T-périodicité de f : $f(x+T) = f(x)$ et $g \circ f(x+T) = g(f(x))$ sont définis et :

$$g \circ f(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Donc $g \circ f$ est T-périodique. ■

Exemples.
• La fonction $x \longmapsto \sin(x) \times \tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$; elle est paire et 2π-périodique.
• La fonction $x \longmapsto -\sin(x)$ est la composée de $x \longmapsto \sin(x)$ suivie de $x \longmapsto -x$; elle

est définie sur $\mathbb{R}$; elle est paire et 2π-périodique.

• La fonction $x \longmapsto \sqrt{\cos(x)}$ est la composée de $x \longmapsto \cos(x)$ suivie de $x \longmapsto \sqrt{x}$; elles est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$; elle est paire et 2π-périodique.

Exercice 3. Réduire le domaine d'étude des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\cos(x)}{x} - x^3 \quad ; \quad g : x \longmapsto \sin^3(x) \times \tan(x) \quad ; \quad h : x \longmapsto \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

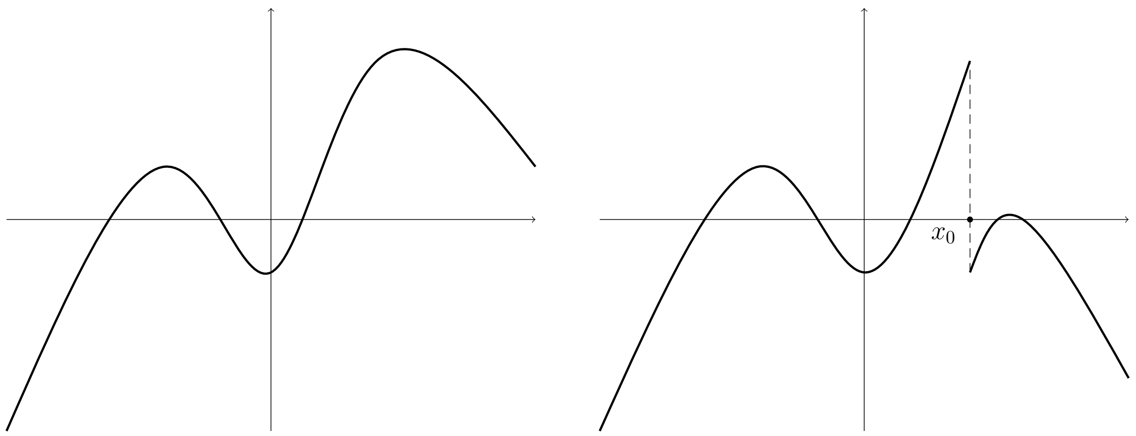
1.6. **Continuité.**

Définition 8.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I (i.e. $I \subset \mathscr{D}_f$).
• *On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

• *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout $x_0 \in I$.*
• *On dit que f est continue si $\mathscr{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalle et si f est continue en tout $x_0 \in \mathscr{D}_f$.*

Remarque. Interprétation géométrique.
Informellement, f est continue sur I s'interprète graphiquement par : "la courbe représentative de f au-dessus de I peut être tracé continument, c'est-à-dire sans lever le stylo."



Continue Discontinue en x_0

Les résultat suivants seront démontrés dans des chapitres ultérieurs :

Propriété 4. *Sur tout intervalle I où elles sont définies, somme, produit, quotient, puissance et composées de fonctions continues sont continues.*

Démonstration. Voir Chapitre "Continuité".

Des résultats très importants pour les fonctions continues sont les suivants :

Théorème 5. Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$; pour $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Voir Chapitre "Continuité".

Le théorème suivant sera démontré partiellement dans le Chapitre "Intégration".

Théorème 6.
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet une primitive sur I, c'est à dire qu'il existe une fonction F définie sur I telle que $F' = f$.
Elle en admet même une infinité qui diffèrent d'une constante additive, i.e. si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, $F_1' = F_2' = f$, alors $\exists c \in \mathbb{R}$, $F_1 = F_2 + c$.

1.7. **Dérivabilité.**

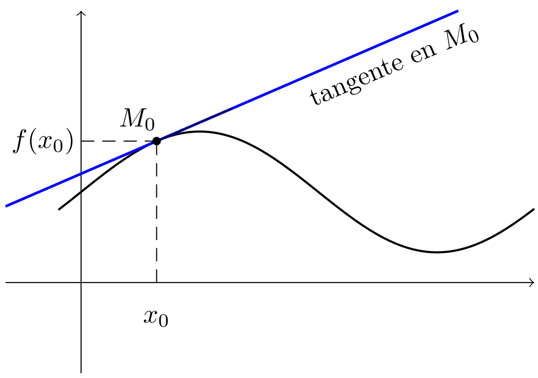
Définition 9.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I (i.e. $I \subset \mathscr{D}_f$).
- *On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si :*
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ a une limite finie lorsque } x \to x_0.$$
- *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $x_0 \in I$.*
- *On dit que f est dérivable si $\mathscr{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalle et si f est dérivable en tout $x_0 \in \mathscr{D}_f$.*

Les résultat suivants seront démontrés dans le Chapitre "Dérivabilité" :

Propriété 7. *Sur tout intervalle I où elles sont définies, somme, produit, quotient, puissance et composées de fonctions dérivables sont dérivables.*

Propriété 8. *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque. Interprétation géométrique de la dérivabilité.
La fonction f est dérivable en $x_0 \in \mathscr{D}_f$ si et seulement si sa courbe représentative admet au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une droite tangente non verticale.



Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente à $\mathscr{C}_f$ en $M_0(x_0, f(x_0))$. L'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

1.8. **Monotonie.**

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Définition 10.
– *f est croissante sur I si :* $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$.
– *f est strictement croissante sur I si :* $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$.
– *f est décroissante sur I si :* $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(y) \leqslant f(x)$.
– *f est strictement décroissante sur I si :* $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(y) < f(x)$.
– *f est (respectivement strictement) monotone sur I si f est (respectivement strictement) croissante ou décroissante.*

Remarques.

– Trivialement toute fonction strictement croissante (respectivement décroissante) est croissante (respectivement décroissante).

– Une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.

Exemple. La fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante et non strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La propriété suivante a été établie sur la fiche de TD 1 :

Propriété 9.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :
– *f est strictement croissante sur I.*
– $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \iff f(x) < f(y)$.
– $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$.

Évidemment on a aussi le résultat analogue pour les fonctions strictement décroissantes :

Propriété 10.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :
– *f est strictement décroissante sur I.*
– $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \iff f(x) > f(y)$.
– $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y)$.

C'est ce qui permet de composer les deux membres d'une inégalité par une fonction strictement monotone pour obtenir une inégalité équivalente ; on conserve le sens de l'inégalité en cas de stricte croissance, on l'inverse en cas de stricte décroissance.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sin(\cos(x)) \leqslant \sin(\sin(x))$$

1.9. Monotonie et signe de la dérivée.

Théorème 11.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
- *f est croissante sur I* $\iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0,$
- *f est décroissante sur I* $\iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0,$
- *f est constante sur I* $\iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Démonstration. Voir Chapitre "Dérivabilité".

Remarque. Attention lorsque I n'est pas un intervalle, ces propriétés sont fausses.

Exemple. Soit :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$, pourtant f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ (elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.)

Concernant la stricte monotonie on n'a pas une telle caractérisation, seulement un résultat plus faible :

Théorème 12.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Démonstration. Voir Chapitre "Dérivabilité".

On peut en déduire :

Corollaire 13.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Exercice 5. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

En présence de plusieurs points isolés où soit la fonction n'est pas dérivable, soit le nombre dérivé n'est pas strictement positif, on applique le Lemme de recollement :

Propriété 14. Lemme de recollement
Soient $a < b < c$ 3 réels ;
si f est strictement croissante sur $[a, b]$ ainsi que sur $[b, c]$
alors f est strictement croissante sur $[a, c]$.

Démonstration. Soient $x \in [a, c]$ et $y \in [a, c]$ tels que $x < y$. On considère 3 cas :

– Si $x, y \in [a, b]$; puisque f est strictement croissante sur $[a, b]$, $f(x) < f(y)$.

– Si $x, y \in [b, c]$; puisque f est strictement croissante sur $[b, c]$, $f(x) < f(y)$.

– Si $x \in [a, b[$ et $y \in]b, c]$, alors puisque f est strictement croissante sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) < f(b) \\ f(b) < f(y) \end{array}\right\} \implies f(x) < f(y)$$

Ainsi $x < y \implies f(x) < f(y)$: f est strictement croissante sur $[a, c]$. ■

Remarque. Le résultat reste vrai, par le même argument si l'on change $[a, b]$ en $]a, b]$ ou en $]-\infty, b]$ ou si l'on change $[b, c]$ en $[b, c[$ ou $[b, +\infty[$. On pourra l'appliquer dans ces cas aussi.

Par contre il devient faux si l'on change le sens du crochet en b : $[a, b]$ en $[a, b[$ ou $[b, c]$ en $]b, c]$.

Exemple : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ avec $b = 0$.

1.10. Bijections.

Définition 11.
Soit I un intervalle avec $I \subset \mathcal{D}_f$; on dit que <u>f réalise une bijection de I sur $f(I)$</u> si :

$$\forall y \in f(I), \exists! x \in I, f(x) = y$$

c'est à dire si tout élément de $f(I)$ est l'image d'une unique élément de I, ou encore si tout élément de $f(I)$ admet un unique antécédent dans I.

Dans ce cas on peut définir une bijection réciproque sur $f(I)$:

Proposition-Définition 12.
Si f réalise une bijection de I sur $f(I)$, alors il existe une fonction notée f^{-1} définie sur $f(I)$ par : $\forall y \in f(I)$,
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$
De plus f^{-1} réalise une bijection de $f(I)$ sur I et :
$$\forall x \in I,\ f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall y \in f(I),\ f(f^{-1}(y)) = y$$
et sa bijection réciproque est f :
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Démonstration. Soit $y \in f(I)$. Par définition $\exists x \in I, f(x) = y$ et puisque f réalise une bijection de I sur $f(I)$, ce réel x est unique. Ainsi en posant $f^{-1}(y)$ égal à cet unique antécédent x, on définit une fonction f^{-1} sur $f(I)$ qui vérifie :
$$\forall y \in f(I), f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$
Alors par construction son image directe est $f^{-1}(\mathscr{D}_{f^{-1}}) = f^{-1}(f(I)) = I$ et soient $y \in f(I)$, avec $y = f(x)$:
$$f^{-1}(y) = x \implies f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f(x) = y \implies f(f^{-1}(y)) = y$$
En particulier pour tout $x \in I$,
$$f^{-1}(y) = x \implies f(f^{-1}(y)) = f(x) \implies y = f(x)$$
ainsi il existe un unique $y \in f(I)$ tel que $f^{-1}(y) = x$, autrement dit f^{-1} réalise une bijection de $f(I)$ sur I. Ainsi elle admet une bijection réciproque $(f^{-1})^{-1}$ définie sur I, et puisque :
$$\forall y \in f(I), f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$
$$\text{et } \forall y \in f(I), f^{-1}(y) = x \iff \left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = y$$
sa bijection réciproque est : $(f^{-1})^{-1} = f$. ∎

Propriété 15.
Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par la symétrie d'axe la droite $y = x$.

Démonstration. Le couple (x, y) est dans le graphe de f si et seulement si $y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$ ssi (y, x) est dans le graphe de f^{-1}. Or la transformation qui envoie le point de coordonnées (x, y) sur (y, x) est la symétrie d'axe $y = x$. Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont donc symétriques par la symétrie d 'axe $y = x$. ∎

Le résultat suivant est très utile pour établir qu'une fonction est bijective et que sa bijection réciproque est continue et strictement monotone. On l'admettra pour l'instant.

Théorème 16. Théorème de la bijection
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$, et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$. De plus elle f^{-1} a même monotonie que f.

1.11. Fonction majorée, minorée, bornée.

Définition 13.
Soient I un intervalle avec $I \subset \mathscr{D}_f$ et soit :

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}.$$

- *On dit que f est minorée sur I, si le sous-ensemble $f(I)$ est minoré, c'est à dire si :*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, f(x) \geqslant m$$

Dans ce cas, le réel m est appelé minorant de f sur I.

- *On dit que f est majorée sur I, si le sous-ensemble $f(I)$ est majoré, c'est à dire si :*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, f(x) \leqslant M$$

Dans ce cas, le réel M est appelé majorant de f sur I.

Exemple. La fonction $x \longmapsto x^2$ est minorée (0 est un minorant) ; la fonction $x \longmapsto -x^2$ est majorée.

Remarque. De façon analogue, on définit, lorsqu'il existent, les borne supérieure, borne inférieure, maximum minimum, d'une fonction f sur I par :

$$\sup_I f = \sup f(I) \quad ; \quad \inf_I(f) = \inf f(I)$$
$$\max_I f = \max f(I) \quad ; \quad \min_I(f) = \min f(I)$$

Définition 14.
Sous les mêmes hypothèses, une fonction f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

On a la caractérisation suivante :

Propriété 17. *Une fonction f est bornée sur I si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant A$$

Démonstration. On applique la caractérisation analogue des parties bornées de $\mathbb{R}$: f est bornée sur I ssi $f(I)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$,

$$\iff \exists A \in \mathbb{R},\ \forall y \in f(I), |y| \leqslant A$$
$$\iff \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, |f(x)| \leqslant A$$

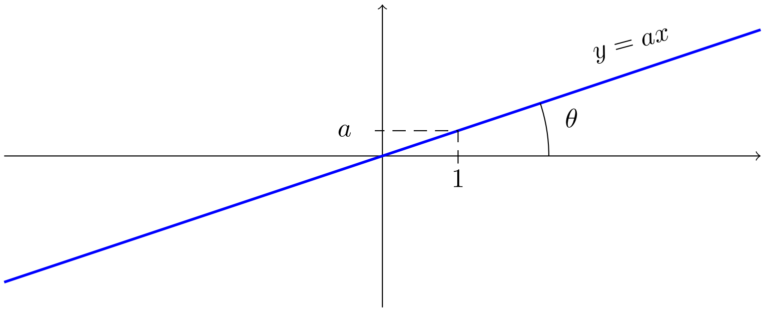
■

2. Fonctions usuelles

2.1. Fonctions linéaires. C'est toute fonction de la forme :

$$x \longmapsto a \times x \qquad \textit{avec } a \in \mathbb{R}$$

Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de nombre dérivée a en tout point.
Sa courbe représentative est la droite de pente a passant par l'origine.



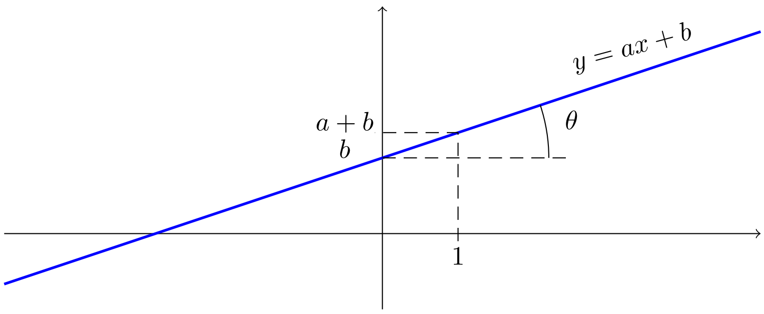
De plus $a = \tan\theta$. Ses limites aux bornes sont :

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

2.2. Fonctions affines. C'est toute fonction de la forme :

$$x \longmapsto a \times x + b \qquad \textit{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de nombre dérivée a en tout point.
Sa courbe représentative est la droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b.



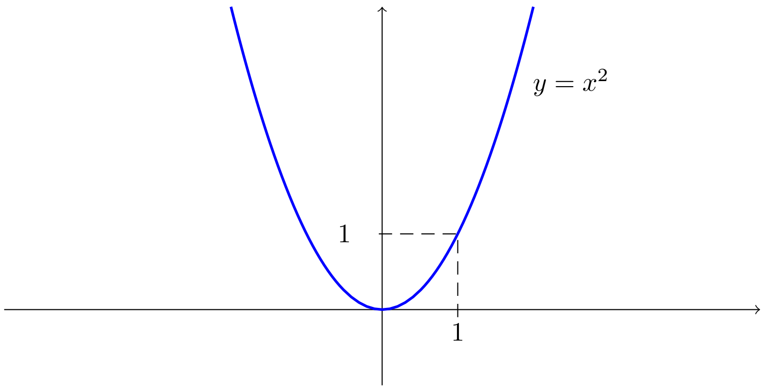
De plus $a = \tan\theta$. Ses limites aux bornes sont :

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax + b = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ b & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

2.3. Fonction carrée. La fonction carrée :

$$x \longmapsto x^2$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Elle est dérivable, de dérivée $x \longmapsto 2x$. Sa courbe représentative est une parabole dirigée selon l'axe $(O, \overrightarrow{j})$.



Ses limites aux bornes sont :

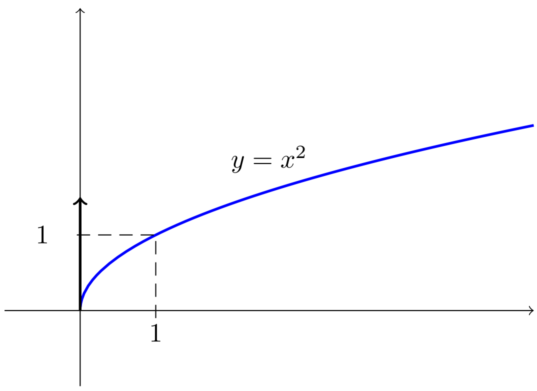
$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$$

2.4. **Fonction racine carrée.** La fonction carrée réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ dont la bijection réciproque est la fonction racine carrée :

$$x \longmapsto \sqrt{x} \qquad \textit{définie sur } \mathbb{R}_+ \textit{ par } \begin{cases} \sqrt{x} \geqslant 0 \\ (\sqrt{x})^2 = x \end{cases}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; sa courbe représentative est un arc de parabole dirigé selon l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ qui admet en l'origine une tangente verticale ; en effet :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[0]{} +\infty$$



Sa limite en $+\infty$ est :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

2.5. **Fonctions puissances entières.** Ce sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto x^n \qquad \textit{avec } n \in \mathbb{Z}$$

Une fonction puissance entière est définie sur :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geqslant 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

elle est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée :

$$\begin{cases} x \longmapsto nx^{n-1} & \text{si } n \neq 0 \\ x \longmapsto 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

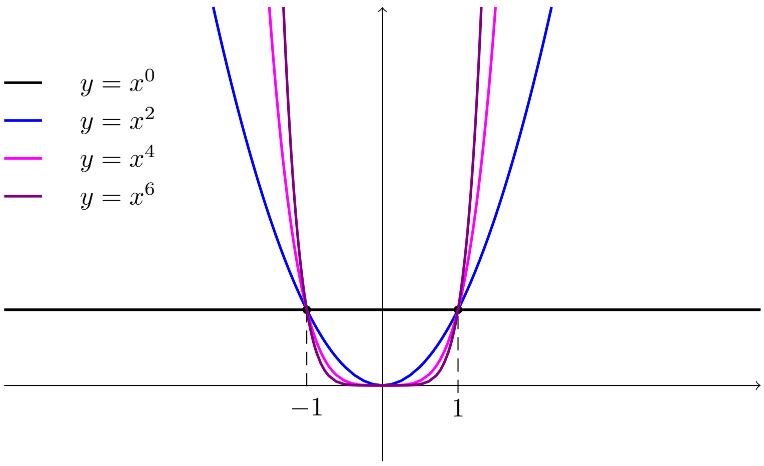
et elle a pour parité :

$$\begin{cases} \text{paire} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{impaire} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

En effet $(-x)^n = (-1)^n \times x^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -x^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

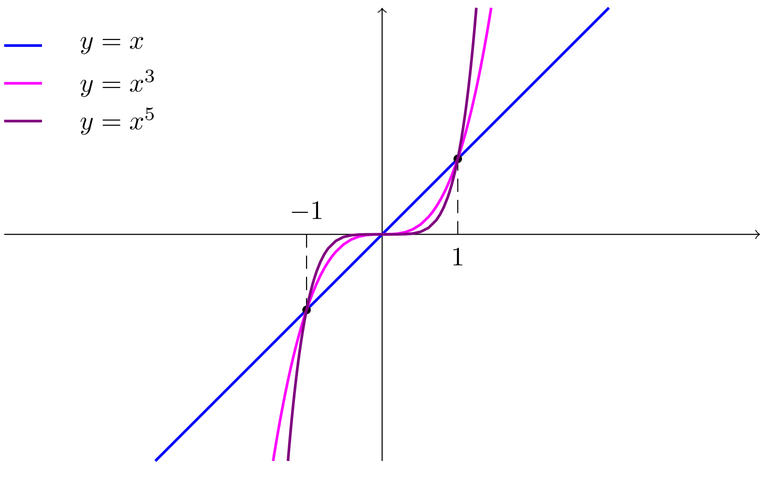
• Courbes représentatives et limites en $\pm\infty$:

– Lorsque $n \geqslant 0$ et n est pair :



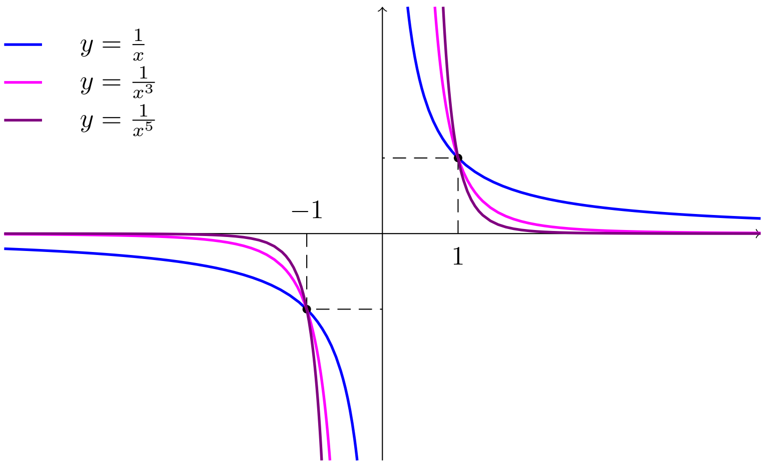
$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

– Lorsque $n \geqslant 0$ et n est impair :



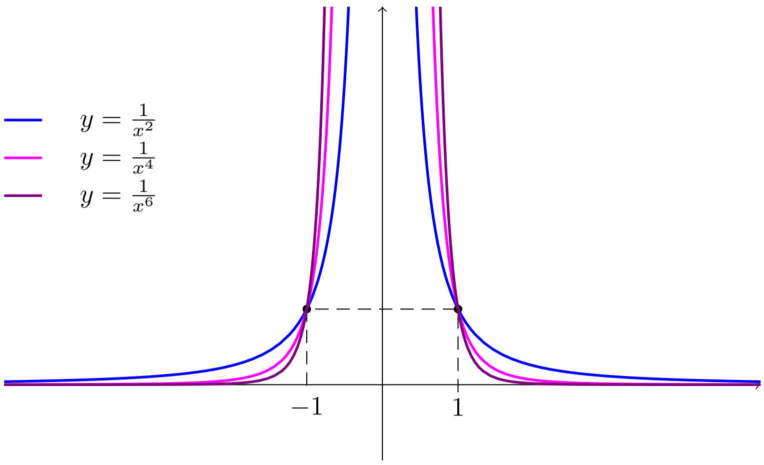
$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n = \pm\infty$$

– Lorsque $n < 0$ et n est impair :



$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n = 0^{\pm}$$

– Lorsque $n < 0$ et n est pair :



$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n = 0^{+}$$

2.6. **Fonctions polynômes.** Ce sont les fonctions de la forme :

$$f : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \textit{avec } (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

C'est la somme des monômes $a_k x^k$ de degrés allant de 0 à n. Lorsque $a_n \neq 0$ on dit que le polynôme a pour degré n.

Toute fonction polynôme de degré $n > 0$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est un polynôme de degré $n - 1$.

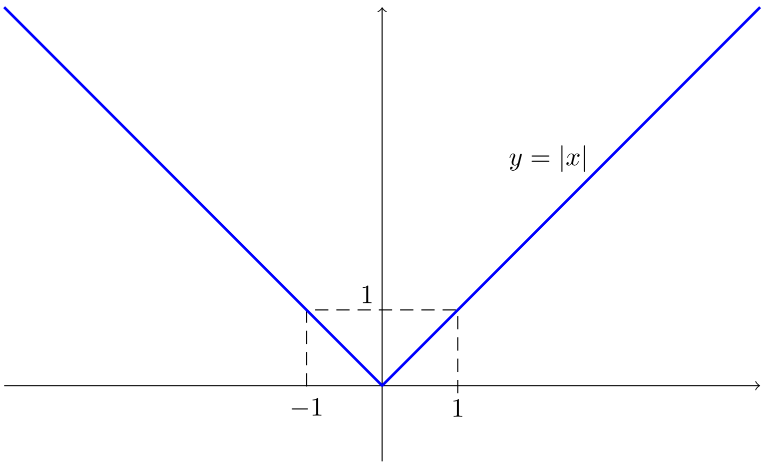
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Ses limites en $\pm\infty$ sont égales à celles de son monôme de plus haut degré.

2.7. **Fonction valeur absolue.**

Définition 15.
$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \textit{si } x \geqslant 0 \\ -x & \textit{sinon} \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et paire.



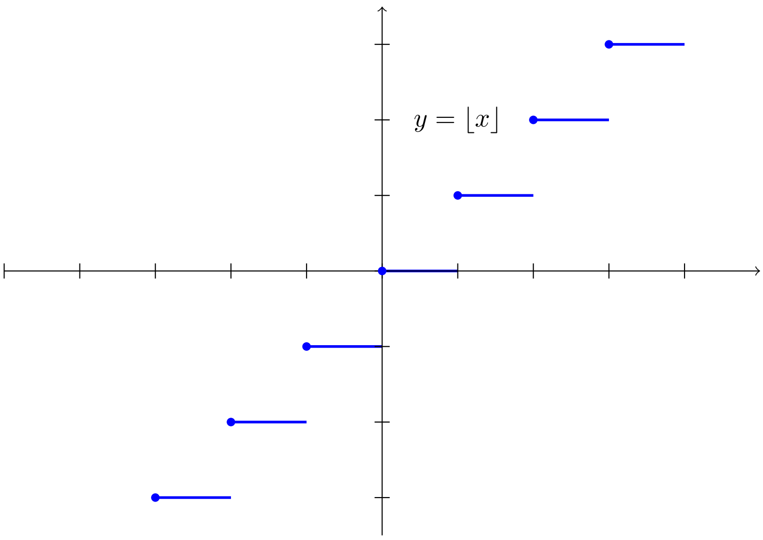
Ses limites aux bornes sont :
$$\lim_{x \to \pm\infty} |x| = +\infty$$

2.8. **Fonction partie entière.**

$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor \quad \textit{c'est le plus grand entier} \leqslant x$$

La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En ses points de discontinuité :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \qquad ; \qquad \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

Sa courbe représentative est en escalier :



et ses limites aux bornes sont :
$$\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$$

2.9. **Fonctions circulaires.**

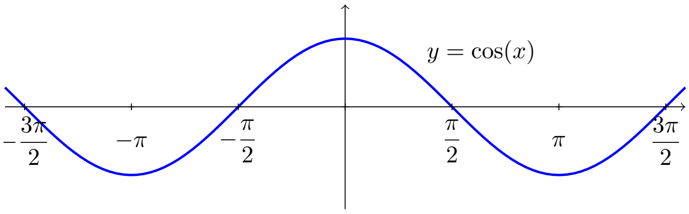
2.9.1. *Fonctions* cos *et* sin.

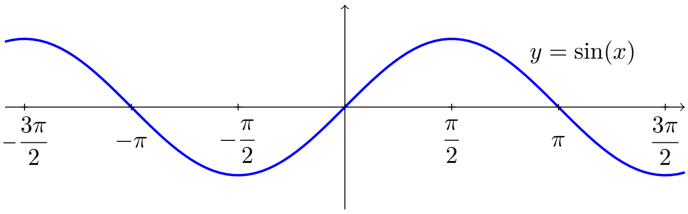
Les fonctions cos et sin sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodique.

$$\cos' = -\sin \qquad ; \qquad \sin' = \cos$$

Elles ont pour image directe l'intervalle $\cos(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$; cos est paire, sin est impaire.

Leurs courbes représentative sont des sinusoïdes s'obtenant l'une de l'autre par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{i}$.





Les fonctions sin et cos n'ont pas de limite en $\pm\infty$. On a par contre les limites usuelles suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(la 1ère est établie dans le TD2, la 2ème s'obtient en multipliant par $\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$).

2.9.2. *Fonction* tan.

La fonction tan est définie et dérivable sur :

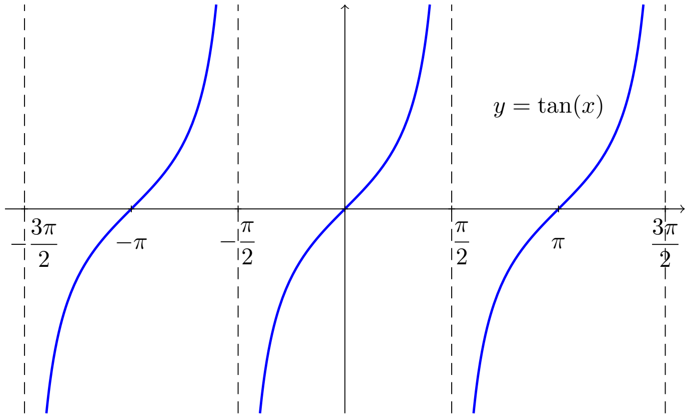
$$\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

sa dérivée est :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

La fonction tan est impaire et π-périodique ; l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a pour image directe $\tan(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$.

Sa courbe représentative admet pour asymptôtes verticales toutes les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.



tan n'a pas de limite en $\pm\infty$ mais :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

2.10. **Fonction** arctan**.**

D'après le théorème de la bijection, la fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est noté arctan.

La fonction arctan *est la bijection réciproque de* tan *restreinte à l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Elle est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, d'image directe* $\arctan(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Sa dérivée est :*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. Le seul point à démontrer est la dérivabilté et dérivée. Ellle sera établie au chapitre "Dérivation". ■

Propriété 18. *La fonction* arctan *est impaire.*

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$; puisque tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x) = y$. La fonction tan étant impaire :

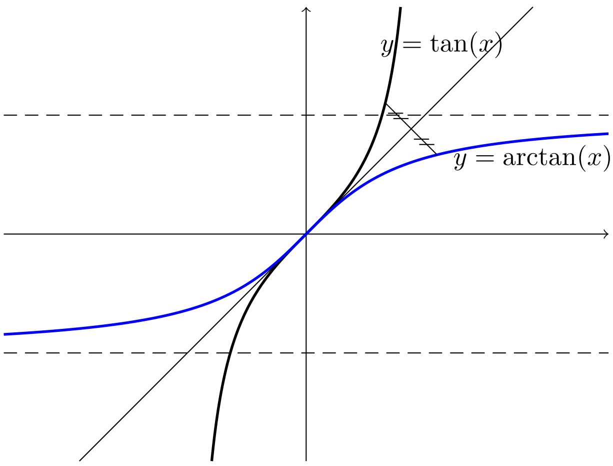
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

et donc :

$$\arctan(y) = x \quad ; \quad \arctan(-y) = -x$$

Ainsi arctan est impaire. ■

• La courbe représentative de arctan s'obtient de celle de tan restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par la symétrie d'axe $y = x$:



En particulier elle admet deux asymptôtes horizontales d'équations $x = \pm\frac{\pi}{2}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

2.11. **Fonction logarithme néperien** ln.

Définition 16. ln *est l'unique primitive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *valant* 0 *en 1 :*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases} \qquad \textit{ce qui équivaut à} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

En particulier elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable de dérivée la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Propriété 19.
Pour tout $a > 0$ *et* $b > 0$ *:*

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln\left(a^n\right) = n \times \ln(a)$$

Démonstration. Démontrons d'abord la première : soit $a > 0$ et $f(x) = \ln(ax)$. Cette fonction f est dérivable comme composée d'une fonction linéaire par ln et en appliquant $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$:

$$f'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

Ainsi f et ln sont deux primitives de la fonction inverse : $x \longmapsto \frac{1}{x}$. Elles diffèrent donc d'une constante additive, *i.e.* :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ax) = \ln(x) + c$$

Or en prenant $x = 1$:

$$\ln(a) = \ln(a \times 1) = \ln(1) + c = c \implies c = \ln(a)$$

Ainsi, pour tout a et x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$. Cela montre la première propriété.

Montrons la troisième ; on a :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln(1) = 0 \implies \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$$

On en déduit alors la seconde :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

Pour la dernière on procède en deux cas selon que $n \geqslant 0$ ou $n < 0$.

– Si $n \in \mathbb{N}$. On procède par récurrence.

(I) Pour $n = 0$: $\ln(a^n) = \ln(1) = 0 = n \times \ln(a)$. L'assertion est donc vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant 0$.

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a \times a^n) = \ln(a) + \ln(a^n) \underset{(HR)}{=} \ln(a) + n\ln(a) = (n+1)\ln(a).$$

Elle reste donc vraie au rang $n + 1$; on conclut à l'aide du principe de récurrence.

– Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$. Alors $(-n) \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) \underset{(-n)\in\mathbb{N}}{=} -(-n)\ln(a) = n\ln(a).$$

ce qui établit la propriété pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. ■

Exercice 6. Simplifier :

$\dfrac{\ln(8)}{\ln(2)} =$

$\ln(2) - \ln(\sqrt{3}-1) - \ln(1+\sqrt{3}) =$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, la fonction ln est strictement croissante. Or $\ln(1) = 0$ et donc :

$$\forall x \in]0,1[, \ln(x) < 0 \qquad ; \qquad \forall x > 1,\, \ln(x) > 0.$$

Concernant ses limites :

Propriété 20.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Démonstration. On repousse au Chapitre "Limites" la preuve des limites de ln en 0^+ et $+\infty$. Obtenons les trois limites restantes.

Pour la dernière, en posant $x = 1+h$:

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = 1$$

Or, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

Posons $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{(x)}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $]0,1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1,+\infty[$. La fonction f admet donc un maximum en $x = 1$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) - 2\sqrt{x} \leqslant f(1) = -2 \leqslant 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$$

Pour tout $x \geqslant 1$, on a donc :

$$0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x} \implies 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

Finalement $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ se déduit en posant $X = \dfrac{1}{x} \underset{0^+}{\longrightarrow} +\infty$:

$$x\ln(x) = \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0^-$$

Or :

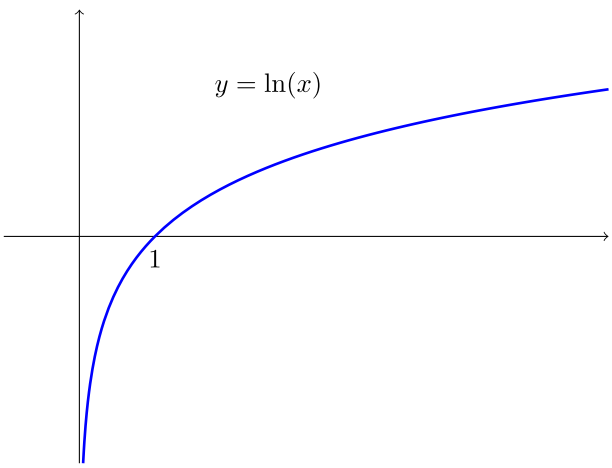
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0^- \ .$$

■

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x}) \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$$

• Courbe représentative de ln :



La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

2.12. **Fonction exponentielle.**

Puisque ln est continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$; sa bijection réciproque est notée exp.

La fonction exp *est la bijection réciproque de* ln*. Elle est définie sur* $\mathbb{R}$*.*

De plus elle est continue, strictement croissante et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0.$$

Propriété 21. *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\begin{aligned}
\exp(0) &= 1\\
\exp(a+b) &= \exp(a) \times \exp(b)\\
\exp(-a) &= \frac{1}{\exp(a)}\\
\exp(a-b) &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)}\\
\forall n \in \mathbb{Z}, (\exp(a))^n &= \exp(na)
\end{aligned}$$

Démonstration. Puisque exp et ln sont bijections réciproques l'une de l'autre, on a $\ln(\exp(a)) = a$ et $(y = \exp(x) \iff \ln(y) = x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) &\iff a+b = \ln(\exp(a) \times \exp(b))\\
&\iff a+b = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b))\\
&\iff a+b = a+b\\
\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} &\iff -a = \ln\left(\frac{1}{\exp(a)}\right)\\
&\iff -a = -\ln(\exp(a))\\
&\iff -a = -a
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\exp(a)^n = \exp(na) &\iff \ln(\exp(a)^n) = \ln(\exp(na))\\
&\iff n\ln(\exp(a)) = na\\
&\iff na = na
\end{aligned}$$

Finalement $\ln(1) = 0 \implies \exp(0) = 1$. ■

Exercice 8. Simplifier :

$$\frac{\exp(2-\sqrt{x}) \times \exp(2+\sqrt{x})}{(\exp(2))^2} =$$

$$\prod_{k=0}^{n} \exp(k)^2 =$$

Concernant la dérivabilité de exp :

Propriété 22. *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; on s'intéresse à la limite de $\frac{\exp(x)-\exp(x_0)}{x-x_0}$ lorsque $x \to x_0$. Posons $y = \exp(x)$ et $y_0 = \exp(x_0)$, alors $x = \ln(y)$ et $x_0 = \ln(y_0)$ et $y \to y_0$ ssi $x \to x_0$.

$$\frac{\exp(x)-\exp(x_0)}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{\ln(y)-\ln(y_0)}$$

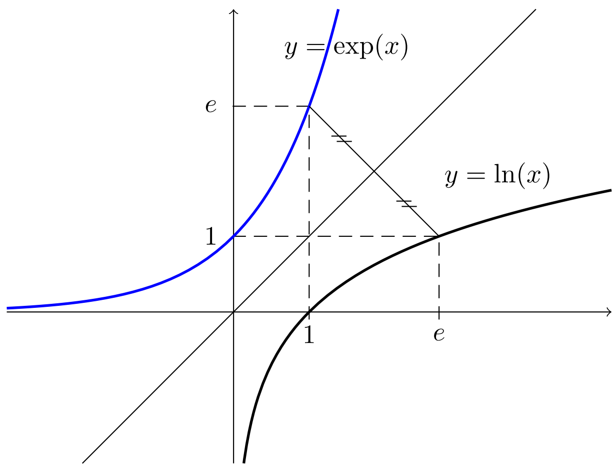
Or
$$\frac{\ln(y)-\ln(y_0)}{y-y_0} \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \ln'(y_0) = \frac{1}{y_0} \neq 0$$
donc en passant à l'inverse :
$$y_0 = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{\ln(y)-\ln(y_0)}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\exp(x)-\exp(x_0)}{x-x_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{\ln(y)-\ln(y_0)} = y_0 = \exp(x_0)$$
Ainsi $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$. ■

On retrouve la caractérisation donnée comme définition de exp au lycée :

La fonction exp *est l'unique fonction satisfaisant l'équation différentielle $y' - y = 0$ et valant 1 en 0.*

En admettant pour l'instant qu'il existe bien une et une seule fonction vérifiant ces deux conditions.

La courbe représentative de exp s'obtient de celle de ln par la symétrie d'axe $y = x$:



On note : $e = \exp(1)$; alors $\ln(e) = 1$.

Les limites à connaître sont :

Propriété 23.
$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+ \quad ; \quad \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$$

Démonstration. On repousse la démonstration des deux premières au Chapitre "Limites". Pour la troisième :
$$\frac{\exp(h)-1}{h} = \frac{\exp(h)-\exp(0)}{h-0} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = \exp(0) = 1$$
■

Exercice 9. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\exp(2x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\exp(x^2)-1}$$

2.13. **Fonctions puissances réelles.**

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n\ln(x))$$
Ceci nous permet de généraliser la notation puissance à des exposants réels :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$; on note :
$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction : $x \longmapsto x^\alpha$ est définie sur :
$$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemples.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; en effet :
$$x^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)$$
est un nombre positif dont le carré vaut :
$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)^2 = \exp\left(2 \times \frac{1}{2}\ln(x)\right) = \exp(\ln(x)) = x.$$
• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; en effet :
$$x^{-\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
• De même pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}}$ est le nombre positif qui élevé à la puissance n vaut x :
$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x)\right)^n = \exp\left(n \times \frac{1}{n}\ln(x)\right) = \exp(\ln(x)) = x.$$
On note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

- Plus généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x^{\frac{p}{n}} &= \exp\left(\frac{p}{n}\ln(x)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x)\right)^p = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x^p)\right) = \sqrt[n]{x^p} \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$$

Les puissances à exposants réels ont mêmes propriétés que les puissances à exposants entiers :

Propriété 24.
Pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \quad ; \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta} \quad ; \quad (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$$

Démonstration. On les démontre dans l'ordre en appliquant les propriétés de l'exponentielle et de ln.

? $x^0 = 1$?

$$x^0 = \exp(0\ln(x)) = \exp(0) = 1$$

? $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$?

$$x^\alpha \times x^\beta = \exp(\alpha\ln(x))\times\exp(\beta\ln(x)) = \exp(\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)) = \exp((\alpha+\beta)\ln(x)) = x^{\alpha+\beta}$$

? $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$?

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{\exp(\alpha\ln(x))}{\exp(\beta\ln(x))} = \exp(\alpha\ln(x) - \beta\ln(x)) = \exp((\alpha-\beta)\ln(x)) = x^{\alpha-\beta}$$

? $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$?

$$(x^\alpha)^\beta = (\exp(\alpha\ln(x)))^\beta = \exp(\beta\ln(\exp(\alpha\ln(x)))) = \exp(\beta\times\alpha\ln(x)) = x^{\alpha\times\beta}$$

? $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$?

$$(xy)^\alpha = \exp(\alpha\ln(xy)) = \exp(\alpha\ln(x) + \alpha\ln(y)) = \exp(\alpha\ln(x))\times\exp(\alpha\ln(y)) = x^\alpha \times y^\alpha$$

■

On généralise aussi les propriétés de exp et ln aux exposants réels :

Propriété 25. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$$

Démonstration. Dans l'ordre :

$$\begin{aligned} \exp(x)^\alpha &= \exp(\alpha\ln(\exp(x))) = \exp(\alpha x) \\ \ln(x^\alpha) &= \ln(\exp(\alpha\ln(x))) = \alpha\ln(x) \end{aligned}$$

■

Exercice 10. Simplifier pour tout $x > 0$:

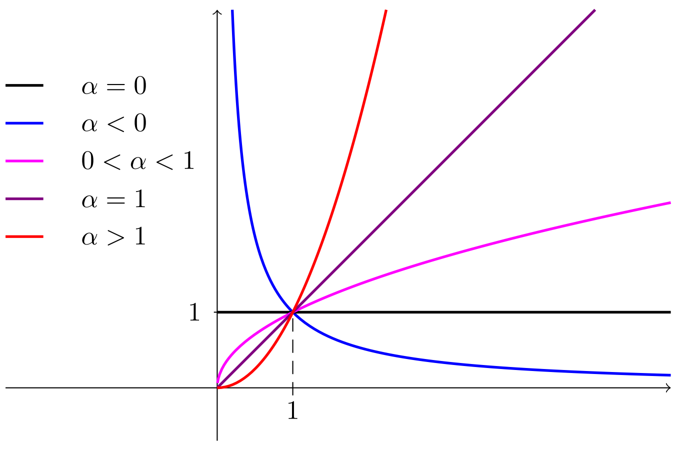
$$\left(\exp\left(-x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2}\ln(x)+\frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable comme composée des fonctions dérivables $x \longmapsto \alpha \ln(x)$ suivie de exp. Sa dérivée est obtenue en appliquant $\exp(u)' = u' \times \exp(u)$:

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \frac{\alpha}{x} \times \exp(\alpha \ln(x)) \\ &= \frac{\alpha}{\exp(\ln(x))} \times \exp(\alpha \ln(x)) \\ &= \alpha \exp(\alpha \ln(x) - \ln(x)) \\ &= \alpha \exp\left((\alpha - 1)\ln(x)\right) \\ &= \alpha x^{\alpha - 1}\end{aligned}$$

ce qui généralise la formule de la dérivée de x^n.

Sa courbe représentative a pour allure, selon les valeurs de α :



2.14. **Fonctions logarithmes et exponentielles en base a.**

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- *La fonction exponentielle en base a est :*

$$x \longmapsto a^x = \exp(x \ln(a))$$

elle est définie sur $\mathbb{R}$.

- *La fonction logarithme en base a est :*

$$\log_a : x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple.

$$\log_{10}(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$$

$$\log_{10}(100) = \frac{\ln(100)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^2)}{\ln(10)} = \frac{2\ln(10)}{\ln(10)} = 2$$

$$\log_{10}(1000) = \frac{\ln(1000)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^3)}{\ln(10)} = \frac{3\ln(10)}{\ln(10)} = 3$$

$$10^1 = 10 \qquad ; \qquad 10^2 = 100 \qquad ; \qquad 10^3 = 1000$$

Dans le cas particulier où $a = e = \exp(1)$, puisque $\ln(e) = 1$:

$$e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x \times 1) = \exp(x)$$

$$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \frac{\ln(x)}{1} = \ln(x)$$

$$e^x = \exp(x) \qquad ; \qquad \log_e(x) = \ln(x)$$

Les fonctions exponentielle et logarithme de base a sont des bijections réciproques l'une de l'autre :

Propriété 26. *Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:*

$$y = a^x \iff x = \log_a(y)$$

Démonstration. On a :

$$y = a^x \iff y = \exp(x\ln(a)) \iff \ln(y) = x\ln(a) \underset{a\neq 1}{\iff} x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(y) \qquad \blacksquare$$

Les fonctions exponentielles et logarithmes en base a vérifient les mêmes propriétés algébriques que exp et ln :

Propriété 27.

$$\log_a(1) = 0$$

Pour tout $x > 0$ et $y > 0$:

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \log_a(x^\alpha) = \alpha \times \log_a(x)$$

Démonstration. Elles sont faciles à déduire des propriétés de ln. Par exemple pour la seconde :

$$\log_a(x \times y) = \frac{\ln(x \times y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$$ ■

Propriété 28. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{x+y} &= a^x \times a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, (a^x)^\alpha &= a^{\alpha x} \end{aligned}$$

Démonstration. Elles se déduisent immédiatement des propriétés algébriques des puissances réelles. ■

Elles sont dérivables comme composées et :

$$\log_a(x)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x\ln(a)}$$
$$(a^x)' = (\exp(x\ln(a))' = \ln(a) \times a^x$$

Un cas particulier important en chimie, est le logarithme décimal.

La fonction *logarithme décimal* *est :*

$$\log_{10} : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

C'est la bijection réciproque de : $x \longmapsto 10^x$ *:*

$$y = \log_{10}(x) \iff x = 10^y$$

Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ *est sa dérivée est donnée par :*

$$\log_{10}(x)' = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

3. Croissance comparée de exp, puissances et ln

Propriété 29. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

Démonstration.

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{e^{\alpha\ln(x)}} = \exp(x-\alpha\ln(x)) = \exp\left(x \times (1-\alpha \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0})\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$|x|^\alpha e^x = e^{\alpha\ln|x|} \times e^x = \exp\left(x+\alpha\ln|x|\right) = \exp\left(x\left(1+\alpha\underbrace{\frac{\ln|x|}{x}}_{\to 0}\right)\right) \underset{-\infty}{\longrightarrow} +0^+$$

■

Propriété 30. *Pour tout $\alpha > 0$:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Démonstration. En posant $X = \ln(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln(x)}{e^{\alpha\ln(x)}} = \frac{X}{e^{\alpha X}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En posant $X = \ln(x) \underset{0^+}{\longrightarrow} -\infty$:

$$x^\alpha \ln(x) = e^{\alpha\ln(x)} \times \ln(x) = e^{\alpha X} \times X \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Exercice 11. Calculer les limites :

$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x}) \qquad ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$$