

Chapitre 5

Les nombres complexes

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/>

On renvoie au préambule pour la motivation historique et pour une esquisse de construction des nombres complexes.

1. NOMBRES COMPLEXES ; FORME ALGÈBRIQUE

1.1. Forme algébrique.

Nous considérons l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{avec } i^2 = -1$$

muni des opérations $+$ et $\times$; elles vérifient les mêmes propriétés que celles dans $\mathbb{R}$ données dans le chapitre 0.

Définition 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$; $z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe z .

Sa partie réelle est $\operatorname{Re}(z) = a$.

Sa partie imaginaire est $\operatorname{Im}(z) = b$.

L'écriture sous forme algébrique est unique : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes partie réelle et partie imaginaire ; autrement dit :

$$a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases}$$

Un nombre complexe z est un réel ssi $\operatorname{Im}(z) = 0$.

C'est un imaginaire pur ssi $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Remarques.

- L'ensemble des réels est une partie de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- L'ensemble des imaginaires purs, noté $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$: $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$$\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}.$$

Propriété 1.

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$$

$$\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

Démonstration. Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$. ■

Exercice 1.

1) Écrire sous forme algébrique :

$$(1 + 2i)^2 \quad ; \quad (1 - 2i) \times (3 + 2i) \quad ; \quad (1 - 2i) \times (1 + 2i)$$

2) Montrer que si $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ alors :

$$\operatorname{Re}(z \times z') = aa' - bb'$$

$$\operatorname{Im}(z \times z') = ab' + a'b$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 = -1 \quad ; \quad z^2 = i$$

1.2. Conjugué d'un nombre complexe.

Définition 2.

On appelle conjugué du complexe $z = a + ib$, le complexe :

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriété 2.

Lorsque bien définis :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z \\ \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} &= (\bar{z})^n \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{(a + ib)} = a - ib \quad ; \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = \operatorname{Re}(z) \\ \frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{a + ib - (a - ib)}{2i} = \frac{2ib}{2i} = \operatorname{Im}(z) \\ \overline{z + z'} &= \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = \bar{z} + \bar{z'} \\ \left. \begin{aligned} \overline{z \times z'} &= \overline{(aa' - bb') + i(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b) \\ \bar{z} \times \bar{z'} &= (a - ib) \times (a' - ib') = (aa' - bb') + i(-ab' - a'b) \end{aligned} \right\} \implies \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \times \bar{z} &= \overline{\left(\frac{1}{z} \times z\right)} = \overline{1} = 1 \implies \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$ s'obtient par récurrence :

(I) Pour $n = 0$: $\overline{z^0} = \bar{1} = 1$ et $(\bar{z})^0 = 1$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé : montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$:

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \bar{z} \stackrel{HR}{=} (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$$

Et $\forall n \in \mathbb{Z}_-, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$ s'en déduit :

Soit $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{(\bar{z})^{-n}} = (\bar{z})^n. \quad \blacksquare$$

Exercice 2. Soit $Z = \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^2$.

Exprimer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de z et $\bar{z}$.

Propriété 3.

Soit $z \in \mathbb{C}$; alors :

- z est réel si et seulement si $z - \bar{z} = 0$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z + \bar{z} = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \\ z \in i\mathbb{R} &\iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff \frac{z + \bar{z}}{2} = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \end{aligned}$$

■

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :
 $z + iz$ est un imaginaire pur.

1.3. Module d'un complexe.

Définition 3.

Le module d'un complexe $z = a + ib$ est le réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque. Lorsque z est un réel, $z = a$, son module coïncide avec sa valeur absolue puisque :

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Le module généralise pour les complexes la valeur absolue d'un réel ; c'est pourquoi on emploie la même notation.

Propriété 4.

Lorsque bien définis :

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= |z| & ; & & |z| = 0 &\iff z = 0 \\ |\operatorname{Re}(z)| &\leq |z| & ; & & |\operatorname{Im}(z)| &\leq |z| \\ |z \times z'| &= |z| \times |z'| & ; & & \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \\ \forall n \in \mathbb{Z}, & |z^n| &= |z|^n \\ z \times \bar{z} &= |z|^2 & ; & & \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$:

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ |z| = 0 &\iff \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0 \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \geq \begin{cases} \sqrt{a^2} = |a| = |\operatorname{Re}(z)| \\ \sqrt{b^2} = |b| = |\operatorname{Im}(z)| \end{cases} \\ z \times \bar{z} &= (a + ib) \times (a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2 \\ z \times \bar{z} &= |z|^2 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (\text{si } z \neq 0) \\ |z \times z'|^2 &= zz' \times \overline{zz'} = z\bar{z} \times z'\bar{z}' = |z|^2 \times |z'|^2 \xrightarrow{|\cdot| \geq 0} |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ \left| \frac{z}{z'} \right| \times |z'| &= \left| \frac{z}{z'} \times z' \right| = |z| \implies \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ se montre par récurrence :

(I) Pour $n = 0$: $|z^n| = |1| = 1$ et $|z|^n = 1$; l'assertion est vérifiée.

(H) Supposons l'assertion vraie à un rang $n \geq 0$ fixé. Alors :

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| \underset{HR}{=} |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$$

et donc l'assertion reste vraie au rang $n + 1$.

Et $\forall n \in \mathbb{Z}_-$, $|z^n| = |z|^n$ s'en déduit : soit $n \in \mathbb{Z}_-$ alors $-n \in \mathbb{N}$ et :

$$|z^n| = \left| \frac{1}{z^{-n}} \right| = \frac{1}{|z^{-n}|} \underset{-n \in \mathbb{N}}{=} \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n.$$

■

Remarque. La propriété $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ est habituellement utilisée pour obtenir l'écriture algébrique de l'inverse ou du quotient de complexes écrit sous forme algébrique : on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur ; au dénominateur cela fait apparaître le module au carré.

Exercice 4. Obtenir la forme algébrique de $\frac{1+2i}{1-i}$.

Remarque. Le module d'une somme n'est pas la somme des modules, comme le montre l'exemple :

$$|1+i| = \sqrt{2} \quad ; \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad ; \quad |1+i+1-i| = |2| = 2 \neq \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

Cependant, l'inégalité triangulaire des modules, qui généralise l'inégalité triangulaire des valeurs absolues, montre que le module d'une somme est comprise entre la différence et la somme des modules.

Propriété 5. (Inégalité triangulaire.)

Pour tous complexes z, z' ,

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration. On démontre la première, la deuxième en découle en appliquant la première à z et $-z'$ puisque :

$$||z| - |-z'|| \leq |z + (-z')| \leq |z| + |-z'|$$

or $|-z'| = |(-1) \times z'| = |-1| \times |z'| = 1 \times |z'| = |z'|$, ainsi :

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

Soient z et z' deux complexes quelconques ; à montrer : $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$. Cette inégalité porte sur des termes tous positifs, elle est donc équivalente à celle obtenue en élevant chaque terme au carré :

$$\begin{aligned} ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| &\iff ||z| - |z'|||^2 \leq |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \\ \underbrace{(|z| + |z'|)^2}_{\in \mathbb{R}} &= |z|^2 + |z'|^2 + 2 \times |z| \times |z'| \\ \underbrace{||z| - |z'|||^2}_{\in \mathbb{R}} &= (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2 \times |z| \times |z'| \\ \underbrace{|z + z'|^2}_{\in \mathbb{C}} &= (z + z') \times \overline{(z + z')} = (z + z') \times (\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}' \end{aligned}$$

Or :

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad ; \quad z'\bar{z}' = |z'|^2 \quad ; \quad z'\bar{z} + z\bar{z}' = z'\bar{z} + \overline{z'\bar{z}} = 2\operatorname{Re}(z'\bar{z})$$

Ainsi :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z'\bar{z})$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 & ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \\
 \iff & |z|^2 + |z'|^2 - 2 \times |z| \times |z'| \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z'\bar{z}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2 \times |z| \times |z'| \\
 \iff & -|z| \times |z'| \leq \operatorname{Re}(z'\bar{z}) \leq |z| \times |z'| \\
 \iff & -|\bar{z}| \times |z'| \leq \operatorname{Re}(z'\bar{z}) \leq |\bar{z}| \times |z'| \\
 \iff & -|z'\bar{z}| \leq \operatorname{Re}(z'\bar{z}) \leq |z'\bar{z}|
 \end{aligned}$$

ce qui découle de $|\operatorname{Re}(Z)| \leq |Z|$ en prenant $Z = z'\bar{z}$. ■

Exercice 5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

2. LE PLAN COMPLEXE

2.1. Construction - affixe d'un point.

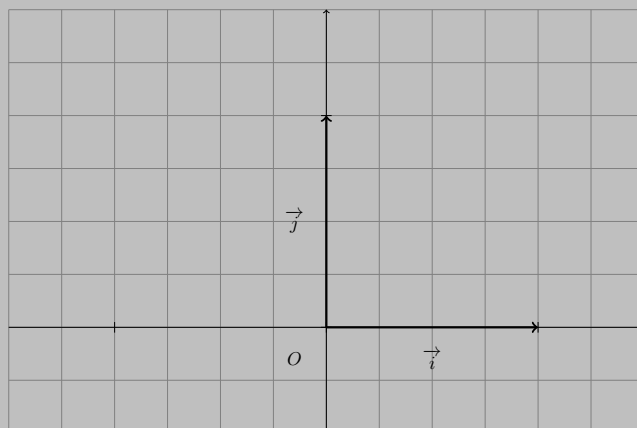
On considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé affixe du point M .

Le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où chaque point est repéré par son affixe, est appelé le plan complexe.

Exercice 6. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $1 + i$ et $-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$.



2.2. Affixe d'un vecteur ; distance et module.

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est le complexe :

$$z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A).$$

Puisque la longueur AB est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_A - z_B|.$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale au module de son affixe.

En particulier, puisque le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a même affixe que le point M :

Le module $|z|$ de l'affixe z d'un point M est égale à la distance du point M à l'origine O du repère.

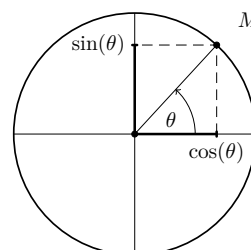
2.3. Argument d'un complexe non nul ; forme trigonométrique.

Le cercle trigonométrique est inclus dans le plan complexe. Il s'identifie via l'affixe de ses points à l'ensemble :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ et M le point d'affixe z ; M est sur le cercle trigonométrique et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \\ z &= \cos(\theta) + i \sin(\theta)\end{aligned}$$



Le réel θ est bien défini modulo 2π . On l'appelle l'argument de z .

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \implies \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un complexe non nul. Alors $\frac{z}{|z|}$ est un complexe de module 1 :

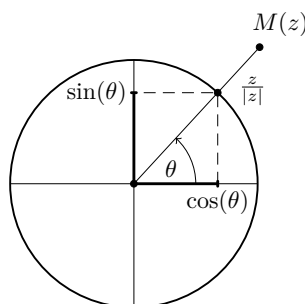
$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

On appelle argument de z , l'argument de $\frac{z}{|z|}$; alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Le réel θ est bien défini modulo 2π ; on l'appelle l'argument de z noté :

$$\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$$



Alors :

L'argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, où M a pour affixe z .

Exemple.

$$\mathbb{R}_+^* = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \equiv 0 \quad [2\pi]\} \quad ; \quad \mathbb{R}_-^* = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \equiv \pi \quad [2\pi]\}$$

Pour déterminer un argument d'un complexe non nul, on utilise :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

Exercice 7. Déterminer un argument de :

$$1 + i \quad ; \quad \sqrt{3} - i \quad ; \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

Ceci nous amène à l'écriture sous forme trigonométrique d'un complexe non nul :

Proposition-Définition 4. Pour tout complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

C'est l'écriture de z sous forme trigonométrique.

Le réel θ n'est pas unique ; il l'est modulo 2π ; c'est un argument de z :

$$\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

Exercice 8. Donner une écriture sous forme trigonométrique de :

$$1 + i \quad ; \quad \sqrt{3} - i \quad ; \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

Les propriétés de l'argument d'un complexe seront établies dans une prochaine partie.

3. EXPONENTIELLE COMPLEXE

3.1. Notation $e^{i\theta}$.**Définition 5.**

On définit pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Avec cette notation, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ de module $|z|$ et d'argument $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$:

$$z = \underbrace{|z| \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))}_{\text{forme trigonométrique}} = \underbrace{|z| \times e^{i\theta}}_{\text{forme exponentielle}}$$

$|z| \times e^{i\theta}$ est une écriture sous forme exponentielle de $z \in \mathbb{C}^*$.

Remarque. Pour tous réels θ_1, θ_2 et tous réels strictement positifs ρ_1, ρ_2 ,

$$\rho_1 \times e^{i\theta_1} = \rho_2 \times e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Exercice 9. Donner une écriture sous forme exponentielle de :

$$1 + i \quad ; \quad \sqrt{3} - i \quad ; \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

On a pour valeurs remarquables et premières propriétés :

Propriété 6.

$$e^0 = 1 \quad ; \quad e^{i\pi} = -1 \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Pour tout réel θ :

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= 1 \quad ; \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^{i(\theta+2k\pi)} &= e^{i\theta} \\ -e^{i\theta} &= e^{i(\theta+\pi)} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$e^0 = \cos(0) + i \sin(0) = 1 \quad ; \quad e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

$$e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) = -\cos(\theta) - i \sin(\theta) = -e^{i\theta}$$

■

Propriété 7. Pour tous réels θ, θ' :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Démonstration. Pour la première on applique les formules de trigonométrie $\cos(\theta + \theta')$, $\sin(\theta + \theta')$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times (\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta')) + i \times (\cos(\theta) \sin(\theta') + \cos(\theta') \sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \times \sin(\theta + \theta') \\ &= e^{i(\theta + \theta')} \end{aligned}$$

Pour la seconde, on applique $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ avec $|e^{i\theta}| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$:

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{|e^{i\theta}|^2} = e^{-i\theta}$$

La dernière se déduit des deux premières :

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta - \theta')}$$

■

Exercice 10.

- 1) Écrire sous forme exponentielle $a = 1 + i$, $b = \sqrt{3} - i$ et $a \times b$.
- 2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On en déduit la célèbre formule de Moivre :

Propriété 8. Formule de Moivre

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Autrement dit :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Démonstration. On procède en deux cas selon que $n \geq 0$ ou $n \leq 0$.

Montrons d'abord par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

(I) Pour $n = 0$, $(e^{i\theta})^0 = 1$ et $e^{in\theta} = e^0 = 1$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n \times e^{i\theta} \stackrel{HR}{=} e^{in\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(n\theta+\theta)} = e^{i(n+1)\theta}$$

Donc l'assertion reste vraie au rang $n + 1$.

On conclut à l'aide du principe de récurrence.

Déduisons-en maintenant que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}_-$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}_-$; alors $(-n) \in \mathbb{N}$, et :

$$(e^{i\theta})^n = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta} \quad \blacksquare$$

Exercice 11. Donner la forme exponentielle de

$$(1 + i\sqrt{3})^5 \quad \text{et de} \quad \frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^2}$$

3.2. Exponentielle complexe.

Définition 6.

Soit $z = x + iy$ avec x, y deux réels. On définit :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos(y) + i \sin(y))$$

où e^x désigne l'exponentielle réelle.

Cela étend la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$; elle préserve les mêmes propriétés algébriques :

Propriété 9.

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'} \quad ; \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad ; \quad \frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}.$$

Démonstration. Elles découlent facilement des mêmes propriétés vérifiées par l'exponentielle réelle et $e^{i\theta}$ et des propriétés de la multiplication, inverse et puissance. En guise d'exemple : soient $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$:

$$\begin{aligned} e^z \times e^{z'} &= e^{x+iy} \times e^{x'+iy'} \\ &= e^x \times e^{iy} \times e^{x'} \times e^{iy'} \\ &= (e^x \times e^{x'}) \times (e^{iy} \times e^{iy'}) \\ &= e^{x+x'} \times e^{i(y+y')} \\ &= e^{z+z'} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^x \times e^{iy}} = \frac{1}{e^x} \times \frac{1}{e^{iy}} = e^{-x} \times e^{-iy} = e^{-x-iy} = e^{-z}. \quad \blacksquare$$

3.3. Propriétés de l'argument.

L'argument d'un complexe vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 10.

Pour tous z, z' deux nombres complexes non nuls :

$$\begin{aligned} \arg(z \times z') &\equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi] \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) &\equiv -\arg(z) \quad [2\pi] \\ \arg(\bar{z}) &\equiv -\arg(z) \quad [2\pi] \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi] \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \arg(z^n) &\equiv n \times \arg(z) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Démonstration. On les établit dans l'ordre à l'aide des propriétés de l'exponentielle ; soient :

$$z = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad z' = \rho' e^{i\theta'} \quad \text{avec} \quad (\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2.$$

$$1) \quad z \times z' = \rho\rho' \times e^{i(\theta+\theta')} \implies \arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi].$$

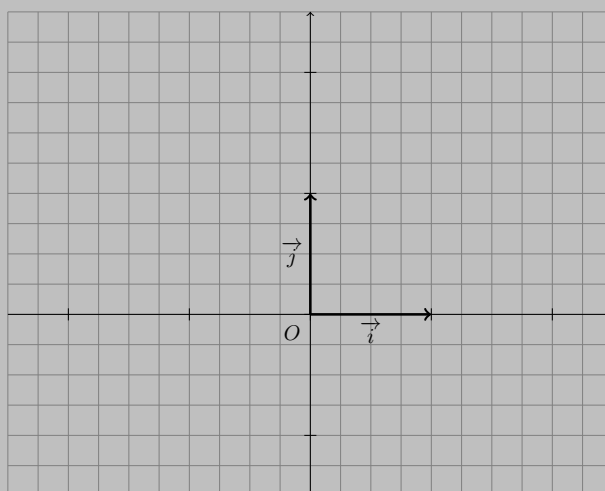
$$2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \times e^{-i\theta} \implies \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi].$$

$$3) \quad \bar{z} = \rho \times e^{-i\theta} \implies \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi].$$

$$4) \quad \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \implies \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi].$$

$$5) \quad \text{Soit } n \in \mathbb{Z}, z^n = \rho^n \times e^{in\theta} \implies \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) \quad [2\pi]. \quad \blacksquare$$

Exercice 12. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $z, z^2, \bar{z}, -z, \frac{1}{z}$ pour $z = 1 + i$ et $z = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$.
On posera $a = 1 + i$ et $b = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$.



3.4. Formules d'Euler.

De :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

on déduit l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; ce sont les formules d'Euler.

Propriété 11. (Formules d'Euler.)

Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta) \implies \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

■

On les utilise pour établir des formules en trigonométrie, le calcul à l'aide d'exponentielle étant plus simple qu'avec des cos ou sin. En particulier elles sont utiles pour "linéariser" des expressions trigonométriques, c'est à dire transformer un produit en somme.

Exemple. Linéariser $\cos^2(\theta)$:

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(e^{i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^2 + 2 \times e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}{4} \\ &= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1)\end{aligned}$$

En particulier on a redémontré le développement de $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Exercice 13. Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

Des formules d'Euler découlent immédiatement :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad ; \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

Exercice 14. Développer puis simplifier :

$$(x + e^{i\theta})(x + e^{-i\theta}) \quad \text{et} \quad (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$$

Plus généralement, en présence d'une somme ou différence de e^{ia} et e^{ib} une simplification s'obtient en factorisant par $e^{i\frac{a+b}{2}}$ (on utilise la moyenne $\frac{a+b}{2}$ des arguments a et b) ; en effet :

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a - a - b}{2} = \frac{a-b}{2} \quad ; \quad b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b - a - b}{2} = -\frac{a-b}{2}$$

Ainsi :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\left(a-\frac{a+b}{2}\right)} + e^{i\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\left(a-\frac{a+b}{2}\right)} - e^{i\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Cette méthode très utile s'appelle la méthode de l'angle moitié (parce qu'on décompose à la moitié des angles a et b) ; elle permet notamment d'obtenir la forme exponentielle de $e^{ia} \pm e^{ib}$.

(Méthode de l'angle moitié.)

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Exercice 15. Écrire sous forme exponentielle :

$$1 + e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad 1 - e^{i\frac{\pi}{2}}$$

4. RÉSOLUTION DE $z^2 = a$ AVEC $a \in \mathbb{C}$

Réolvons l'équation

$$z^2 = a \quad (E)$$

où $a \in \mathbb{C}$.

On distingue deux cas selon que $a = 0$ ou $a \neq 0$.

- Si $a = 0$. Alors :

$$z^2 = a \iff z^2 = 0 \iff z = 0$$

par intégrité de la multiplication. Il y a pour unique solution $z = 0$.

- Si $a \neq 0$.

Alors il existe $\rho_0 = |a| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a = \rho_0 \times e^{i\theta_0}.$$

soit l'écriture sous forme exponentielle de a . Puisque $z = 0$ n'est pas solution de (E), une solution z peut aussi s'écrire sous forme exponentielle :

$$z = \rho \times e^{i\theta} \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff (\rho \times e^{i\theta})^2 = \rho_0 \times e^{i\theta_0} \iff \rho^2 \times e^{2i\theta} = \rho_0 \times e^{i\theta_0} \\ &\iff \begin{cases} \rho^2 = \rho_0 \\ \text{et} \\ 2\theta \equiv \theta_0 \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_0} \quad \text{car } \rho > 0 \\ \text{et} \\ \theta \equiv \frac{\theta_0}{2} \quad [\pi] \end{cases} \\ &\iff \rho = \sqrt{\rho_0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta \equiv \frac{\theta_0}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi + \frac{\theta_0}{2} \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi il y a deux solutions :

$$z = \sqrt{\rho_0} \times e^{i\frac{\theta_0}{2}} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{\rho_0} \times e^{i(\pi + \frac{\theta_0}{2})} = \sqrt{\rho_0} \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\theta_0}{2}} = -\sqrt{\rho_0} \times e^{i\frac{\theta_0}{2}}$$

On vient de montrer :

Propriété 12.

L'équation :

$$z^2 = \rho_0 \times e^{i\theta_0}$$

(où $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$) a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z = \pm \sqrt{\rho_0} \times e^{i\frac{\theta_0}{2}}.$$

Exercice 16.

- 1) Déterminer une "racine carrée" de i et de $-i$.
- 2) En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme $x^4 + 1$ en 4 facteurs de degré 1.
- 3) En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $x^4 + 1$ en 2 facteurs de degré 2.

