Chapitre 6

Sommes, produits, identités remarquables

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

1. Notation somme : $\sum$

$\sum$ est la lettre grecque "Sigma majuscule" et se lit "Somme" dans le contexte de ce cours.

1.1. Définition.

Définition 1.
• *Soient $n \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, a_2,..., a_n des nombres réels ou complexes. On note :*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

la somme des a_i pour i variant de 0 jusqu'à n.
• *Plus généralement, si $p \in [\![0, n]\!]$, on note :*

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

la somme des a_i pour i variant de p jusqu'à n.
• *La variable i s'appelle l'indice de la somme.*

Exemples.

$$\sum_{i=1}^{5} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Remarques.
• La variable i, indice de la somme, est une variable muette : elle ne sert qu'à la définition de la somme, et le résultat ne peut pas en dépendre. Elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable non deja utilisée (on a coutume d'employer $i, j, k, \ldots$) :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{k=p}^{n} a_k$$

• Par convention, lorsque $p > n$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = 0.$$

Exercice 1. Ecrire les sommes suivantes à l'aide du symbôle $\sum$:

$$A = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + 100^5, \qquad B = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + a^{100},$$

$$C = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \cdots + \frac{a^{200}}{200}, \qquad D = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{100}}{101},$$

$$E = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots - \frac{100}{101},$$

1.2. **Propriétés.**

On vérifie les deux propriétés suivantes ; elles sont fondamentales pour le calcul de sommes.

1.2.1. *Linéarité de la somme.*

Propriété 1. (Linéarité.)

Soient les suites finies de réels ou complexes $(a_k)_{p\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{p\leqslant k\leqslant n}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$; alors :

$$\sum_{k=p}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=p}^{n}(\lambda \times a_k) = \lambda \times \sum_{k=p}^{n} a_k$$

Démonstration. La première découle de l'associativité et de la commutativité de l'addition :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}(a_k + b_k) &= (a_p + b_p) + (a_{p+1} + b_{p+1}) + \cdots + (a_n + b_n) \\
&= (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n) + (b_p + b_{p+1} + \cdots + b_n) \\
&= \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k
\end{aligned}$$

La seconde découle de la distributivité de $\times$ sur $+$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}(\lambda \times a_k) &= \lambda \times a_p + \lambda \times a_{p+1} + \cdots + \lambda \times a_n \\
&= \lambda \times (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n) \\
&= \lambda \times \sum_{k=p}^{n} a_k
\end{aligned}$$

■

1.2.2. *Décrochage.*

Propriété 2. (Décrochage.)
Soit une suite finie $(a_k)_{p \leqslant k \leqslant n}$ et soit un entier q avec $p \leqslant q < n$; alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. Cela découle de l'associativité de l'addition :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} a_k &= \underbrace{a_p + \cdots + a_q} + \underbrace{a_{q+1} + \cdots + a_n} \\ &= \quad \sum_{k=p}^{q} a_k \quad + \quad \sum_{k=q+1}^{n} a_k.\end{aligned}$$

■

1.3. **Formules de sommes usuelles.**

Les formules suivantes sont à connaître :

Somme de constantes.
Soient p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{i=p}^{n} 1 = (n - p + 1).$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$; on procède par récurrence sur l'entier $n \geqslant p$.

(I) Pour $n = p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{p} 1 = 1 = p - p + 1$.

(H) Supposons que pour $n \geqslant p$ fixé : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n+1} 1 = \sum_{k=p}^{n} 1 + \sum_{k=n+1}^{n+1} 1 \underset{(HR)}{=} (n - p + 1) + 1 = (n + 1) - p + 1$$

L'assertion reste vraie au rang $n + 1$. On conclut d'après le principe de récurrence. ■

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$; calculer :

$$\sum_{i=1}^{n} (2a + 1)$$

Somme d'entiers consécutifs.
Soient p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=p}^{n} k = \underbrace{(n-p+1)}_{\textit{nbre de termes}} \times \underbrace{\left(\frac{p+n}{2}\right)}_{\substack{\textit{moyenne des}\\ \textit{premier et}\\ \textit{dernier termes}}} .$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Appelons $S = \sum_{k=p}^{n} k$ cette somme ; alors :

$$\begin{array}{ccccccccc} 2S & = & p & + & (p+1) & + & \cdots & + & n \\ & + & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & p \\ & = & (p+n) & + & (p+n) & + & \cdots & + & (p+n) \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(n-p+1)\text{ termes}}$$

$$= (p+n) \times (n-p+1)$$

$$\Longrightarrow S = (n-p+1) \times \frac{p+n}{2}$$

■

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \qquad ; \qquad \sum_{k=p}^{n}(2k-1)$$

Somme des carrés.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$. $\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. L'assertion est donc vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 \\
&\underset{(HR)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) \\
&= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right) \\
&= (n+1) \times \left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

L'assertion reste vraie au rang $(n+1)$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. ∎

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$.

Somme des cubes.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$. $\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. L'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant 0$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\ &= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{2^2} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $(n+1)$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

Somme des puissances successives.
Soit $q \in \mathbb{C}$ et $p \leqslant n$ deux entiers naturels ; alors :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. On considère deux cas, selon que $q = 1$ ou $q \neq 1$.

• Si $q = 1$. Alors $\forall k \in [\![p, n]\!]$, $q^k = 1$, ainsi :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1.$$

• Dans la suite $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

(I) Pour $n = p$; $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p$ et $q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = q^p \times \frac{1-q}{1-q} = q^p$. Donc l'assertion est vraie au rang p.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant p$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} q^k &= \sum_{k=p}^{n} q^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} q^k \\
&\underset{HR}{=} q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{q^p - q^{n+2}}{1-q} \\
&= q^p \times \frac{1-q^{n+2-p}}{1-q} \\
&= q^p \times \frac{1-q^{(n+1)-p+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $n+1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence.

■

Remarques.

• La formule peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = (1^{er}\ terme) \times \frac{1-q^{(nombre\ de\ termes)}}{1-q}.$$

• En particulier pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = u_0 \times q^k.$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_0 \times q^k = u_0 \times \sum_{k=p}^{n} q^k = u_0 \times q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \boxed{u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

Exercice 5. Écrire avec la notation $\sum$ et calculer :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024}\ .$$

Exercice 6. Soit un réel $\theta \not\equiv 0\ \ [2\pi]$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\,k\theta}$.

2) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\,k\theta} = e^{\mathrm{i}\,n\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

1.4. Changement d'indices.

Pour calculer une somme il est souvent intéressant de procéder à un changement d'indice :

Proposition-Définition 2.
Pour i l'indice d'une somme, et pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

- *Le changement d'indice :*

$$\boxed{j = m + i} \qquad \textit{(translation de } m\textit{)}$$

change l'écriture d'une somme d'indice i en une somme d'indice j de la manière suivante :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m}$$

- *Le changement d'indice :*

$$\boxed{j = m - i} \qquad \textit{(symétrie en } \tfrac{m}{2}\textit{)}$$

change l'écriture d'une somme d'indice i en une somme d'indice j de la manière suivante :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=m-n}^{m-p} a_{m-j}$$

Remarque. Attention, aucune autre forme de changement d'indice n'est licite : pas de $j = 2i + 1$ ou $j = i + \frac{1}{2}$, etc.

Démonstration. Pour le changement d'indice $j = m + i$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m} &= a_{p+m-m} + a_{p+m+1-m} + \cdots + a_{n+m-m} \\ &= a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Pour le changement d'indice $j = m - i$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=m-n}^{m-p} a_{m-j} &= a_{m-(m-n)} + a_{m-(m-n+1)} + \cdots + a_{m-(m-p)} \\ &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_p \\ &= a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n\end{aligned}$$

d'où l'égalité. ∎

Exemples.

- Calculer $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$. On procède au changement d'indice $j = k + 1$; alors :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

- Calculer $\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3$. On procède au changement d'indice $j = n - k$; alors :

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3 = 0 + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 7. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$ de deux manières différentes :

1) En appliquant la linéarité.

2) À l'aide d'un changement d'indice.

1.5. **Sommes télescopiques.**

Il s'agit de sommes dont le calcul se simplifie, tout ou partie des termes au rang k s'annulant avec tout ou partie des termes au rang suivant $k+1$ et ainsi de suite.

$$\begin{array}{lllllllll}
\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_k-u_{k+1}) & = \boxed{u_p} & -u_{p+1} & & & & & & \\
 & & +u_{p+1} & -\underline{u_{p+2}} & & & & & \\
 & & & +\underline{u_{p+2}} & \cdots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & -u_{n-1} & & & \\
 & & & & & +u_{n-1} & -\underline{u_n} & & \\
 & & & & & & +\underline{u_n} & \boxed{-u_{n+1}} & = u_p-u_{n+1}
\end{array}$$

Ainsi :

Propriété 3.

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k-u_{k+1}) = u_p-u_{n+1} \quad ; \quad \sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_p$$

Démonstration. La seconde découle de la première puisque par linéarité :

$$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k) = -\sum_{k=p}^{n}(u_k-u_{k+1})$$

Établissons la première.Une justification graphique figure ci-dessus, mais on va l'établir plus rigoureusement par linéarité, changement d'indice et décrochage.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}(u_k-u_{k+1}) &= \sum_{k=p}^{n}u_k-\sum_{k=p}^{n}u_{k+1} && \text{par linéarité}\\
&= \sum_{k=p}^{n}u_k-\sum_{j=p+1}^{n+1}u_j && j=k+1 \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme}\\
&= \left(u_p+\sum_{k=p+1}^{n}u_k\right)-\left(\sum_{j=p+1}^{n}u_j+u_{n+1}\right) && \text{par décrochage}\\
&= u_p-u_{n+1}+\underbrace{\sum_{k=p+1}^{n}u_k-\sum_{j=p+1}^{n}u_j}_{=0} && \text{par commutativité de } +\\
&= u_p-u_{n+1} && \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemple. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$.

Il est grandement simplifié si l'on remarque que $2k+1=(k+1)^2-k^2$; la somme télescope :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = (n+1)^2 - 1^2 = \boxed{n^2+2n}$$

Exercice 8. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)$$

2. Sommes doubles

2.1. Somme double d'une famille de nombres doublement indexée.

Définition 3.
Soient n, p deux entiers non nuls et soit $(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ une famille de $p \times n$ nombres (réels ou complexes) doublement indexée, c'est-à-dire les nombres :

$$a_{1,1}\,,\, a_{1,2}\,,\, \dots,\, a_{1,n}\,,\, a_{2,1},\, a_{2,2}\,,\, \dots,\, a_{2,n}\,,\, \dots,\, a_{p,1}\,,\, a_{p,2}\,,\, \dots,\, a_{p,n}.$$

On note $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$ la somme de tous ces nombres, c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} + a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} + \cdots + a_{p,1} + a_{p,2} + \cdots + a_{p,n}$$

Exemples.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} 1 = 1+1+1 \\ +1+1+1 = 6$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 4}} (i+j) = 2+3+4+5 \\ +3+4+5+6 = 32$$

Propriété 4. Décomposition par lignes/colonnes
Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de $p \times n$ nombres. Alors :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\substack{\textit{Décomposition}\\ \textit{par lignes}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\right)}_{\substack{\textit{Décomposition}\\ \textit{par colonnes}}}$$

Démonstration. Les $a_{i,j}$ peuvent être écrits dans un tableau à p lignes et n colonnes :

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	j_0	$\cdots$	n	Sommation par ligne
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	a_{1,j_0}	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i_0	$a_{i_0,1}$	$a_{i_0,2}$	$\cdots$	a_{i_0,j_0}	$\cdots$	$a_{i_0,n}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$a_{p,1}$	$a_{p,2}$	$\cdots$	a_{p,j_0}	$\cdots$	$a_{p,n}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}$
Sommation par colonne	$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,2}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,j_0}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,n}$	

Pour calculer la somme des éléments du tableau, on peut par associativité et commutativité de l'addition :

- Soit calculer la somme des éléments de chaque ligne puis additionner les p sommes obtenues :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

C'est une décomposition par lignes.

• Soit calculer la somme des éléments de chaque colonne puis additionner les n sommes obtenues :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\right)$$

C'est une décomposition par colonnes.

D'où le résultat. ∎

Remarques.

- Ainsi le calcul d'une somme double se ramène au calcul de sommes simples.
- Lorsque $n = p$, on peut noter $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$ plutôt que $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$.

Exemple. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+1)\times j$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+1)\times j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+1)\times j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)\sum_{j=1}^{n} j\right] && \text{Par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(i+1)\right]\times\frac{n(n+1)}{2} && \text{Par linéarité} \\
&= \left[\sum_{j=2}^{n+1} j\right]\times\frac{n(n+1)}{2} && j = i+1 \\
&= \frac{n(n+3)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

Remarque. Dans ce contexte on peut utiliser le principe de séparation des variables :

Propriété 5. Séparation des variables.
Soient p, q, n, m des entiers et $(a_i)_{p\leqslant i\leqslant n}$, $(b_j)_{q\leqslant j\leqslant m}$ deux familles de nombres ; alors :

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}(a_i\times b_j) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=q}^{m} b_j\right).$$

Démonstration.

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}(a_i \times b_j) = \sum_{i=p}^{n}\left(a_i \sum_{j=q}^{m} b_j\right) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=q}^{m} b_j\right) \qquad \text{par linéarité}$$

■

Exercice 9. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i \times j)$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$.

Plus généralement on peut sommer la partie du tableau débutant ligne q et colonne m :

Si $1 \leqslant q \leqslant p$ et $1 \leqslant m \leqslant n$ sont des entiers :

$$\sum_{\substack{q\leqslant i\leqslant p\\ m\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=q}^{p}\left(\sum_{j=m}^{n} a_{i,j}\right)}_{\substack{\textit{Décomposition}\\ \textit{par lignes}}} = \underbrace{\sum_{j=m}^{n}\left(\sum_{i=q}^{p} a_{i,j}\right)}_{\substack{\textit{Décomposition}\\ \textit{par colonnes}}}$$

2.2. Sommation sur une partie de la famille doublement indexée.

Dans toute cette partie on considère une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de nombres (nombre de lignes = nombre de colonnes).

Dans ce cas, il faut savoir aussi calculer la somme des $a_{i,j}$ sur une partie de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ vérifiant :

$$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n \quad \text{ou} \quad 1\leqslant i< j\leqslant n \quad \text{ou} \quad 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n \quad \text{ou} \quad 1\leqslant j< i\leqslant n.$$

2.2.1. *Partie triangulaire supérieure : $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$.*

Définition 4.
La notation :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$$

désigne la somme des nombres $a_{i,j}$ de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ vérifiant la condition :

$$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n.$$

Le calcul s'effectue à l'aide de :

Propriété 6. Décomposition par lignes/colonnes.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

Démonstration. Cette fois-ci on ne somme que les éléments $a_{i,j}$ du tableau situés dans la partie triangulaire supérieure :

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	a_{1,i_0}	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
2		$a_{2,2}$	$\cdots$	a_{2,i_0}	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum_{j=2}^{n} a_{2,j}$
			$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
i_0				a_{i_0,i_0}		$a_{i_0,n}$	$\sum_{j=i_0}^{n} a_{i_0,j}$
					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n						$a_{n,n}$	$\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
Somme par colonne	$\sum_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{i_0} a_{i,i_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$	

Par le même raisonnement que précédemment, on obtient par associativité et commutativité de l'addition :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) \qquad \blacksquare$$

Exemple. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i\times j)$.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i\times j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i\times j) = \sum_{j=1}^{n}\left(j\times\sum_{i=1}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j\times\frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2)\\
&= \frac{1}{2}\times\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{3n(n+1)+4n+2}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}\end{aligned}$$

Remarque. Attention, ici pas de séparation des variables car la deuxième somme a une borne dépendant de j.

Exercice 10. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$:

Remarque. Plus généralement : pour 2 entiers p, n :

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} a_{i,j}\right)$$

Exemple.

$$\sum_{2\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=2}^{j} a_{i,j}\right)$$

2.2.2. *Partie triangulaire supérieure stricte : $1\leqslant i<j\leqslant n$.*

Définition 5.
La notation :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}$$

désigne la somme des nombres $a_{i,j}$ *de la famille* $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *vérifiant la condition :*

$$1\leqslant i<j\leqslant n.$$

Le calcul s'effectue à l'aide de :

Propriété 7. Décomposition par lignes/colonnes.

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

Démonstration. Cette fois le tableau des éléments $a_{i,j}$ qui figurent dans la somme est :

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1		$a_{1,2}$	$\cdots$	a_{1,i_0}	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}$
2			$\ddots$	a_{2,i_0}	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum_{j=3}^{n} a_{2,j}$
				$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
i_0					$\ddots$	$a_{i_0,n}$	$\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j}$
						$\ddots$	$\vdots$
n							0
Somme par colonne	0	$\sum_{i=1}^{1} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{i_0-1} a_{i,i_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n}$	

On obtient par le même raisonnement que précédemment :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

■

Exercice 11. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i.$

Remarque. Plus généralement : pour 2 entiers p, n :

$$\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p+1}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

Exemple.

$$\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=3}^{n}\left(\sum_{i=2}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

2.2.3. *Partie triangulaire inférieure* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.
Les deux cas restants, pour $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j < i \leqslant n$ se déduisent des cas précédents (en échangeant les rôles des indices i, j) ; on peut aussi les interpréter sur les parties triangulaires inférieures et triangulaires inférieures strictes.

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}\right)$$

i \ j	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1	$a_{1,1}$						$\sum_{j=1}^{1} a_{1,j}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$					$\sum_{j=1}^{2} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
i_0	$a_{i_0,1}$	$a_{i_0,2}$	$\cdots$	a_{i_0,i_0}			$\sum_{j=1}^{i_0} a_{i_0,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$		
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	a_{n,i_0}	$\cdots$	$a_{n,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$
Somme par colonne	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\sum_{i=2}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=i_0}^{n} a_{i,i_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=n}^{n} a_{i,n}$	

2.2.4. *Partie triangulaire inférieure stricte* $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

$$\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}\right)$$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1							0
2	$a_{2,1}$						$\displaystyle\sum_{j=2}^{1} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$
i_0	$a_{i_0,1}$	$a_{i_0,2}$	$\ddots$				$\displaystyle\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$		$a_{n,n-1}$		$\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}$
Somme par colonne	$\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=3}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=i_0+1}^{n} a_{i,i_0}$	$\displaystyle\sum_{i=n}^{n} a_{i,n-1}$	0	

Remarque.
D'autres cas analogues peuvent se présenter, par exemple pour $2 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, pour lesquels les formules se généralisent ou se déduisent des cas triangulaires supérieurs en échangeant les rôles de i et j.

3. Notation produit $\prod$

3.1. Définition.

Définition 6.

- *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes. On note :*

$$\prod_{i=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$$

le produit des a_i pour i variant de 0 à n.

- *Plus généralement, si $p \in [\![0, n]\!]$, on note :*

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n$$

le produit des a_i pour i variant de p jusqu'à n.

- *La variable i s'appelle l'indice du produit.*

Exemples.

$$\prod_{k=1}^{n} a = a^n \qquad ; \qquad \prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}.$$

- Soit $a \in \mathbb{C}$:

$$\prod_{k=1}^{n} a^k = a^{\sum_{k=1}^{n} k} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Remarque. Par convention, lorsque $p > n$:

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = 1$$

3.2. Propriétés.

Propriété 8.
Pour toutes familles de nombres $(a_k)_{k \in [\![p,n]\!]}$, $(b_k)_{k \in [\![p,n]\!]}$, et tout nombre λ, lorsque bien définis :

$$\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k \qquad ; \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_k}{\prod_{k=p}^{n} b_k}$$

$$\prod_{k=p}^{n} \lambda \times a_k = \lambda^{n-p+1} \times \prod_{k=p}^{n} a_k \qquad : \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \prod_{k=p}^{n} (a_k)^m = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k \right)^m$$

Démonstration. Les 3 premières découlent de l'associativité et de la commutativité de $\times$, et la dernière de $a^m \times b^m = (a \times b)^m$. ■

Propriété 9.

$$\prod_{k=p}^{n} (a^{u_k}) = a^{\sum\limits_{k=p}^{n} u_k}.$$

Démonstration. S'obtient par une récurrence immédiate en utilisant $a^u \times a^v = a^{u+v}$.■

Propriété 10. Décrochage
Pour tous entiers $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$ *:*
$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{q} a_k \times \prod_{k=q+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. Découle de l'associativité de la multiplication. ■

Proposition-Définition 7.
Pour i *l'indice d'un produit, et pour tout* $m \in \mathbb{Z}$ *:*
- *Le changement d'indice :*
$$\boxed{j = m + i} \qquad \textit{(translation de } m\textit{)}$$
change l'écriture d'un produit d'indice i *en un produit d'indice* j *de la manière suivante :*
$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \prod_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m}$$
- *Le changement d'indice :*
$$\boxed{j = m - i} \qquad \textit{(symétrie en } \tfrac{m}{2}\textit{)}$$
change l'écriture d'un produit d'indice i *en un produit d'indice* j *de la manière suivante :*
$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \prod_{j=m-n}^{m-p} a_{m-j}$$

Démonstration. Analogue à celle pour les sommes en changeant $\sum$ par $\prod$ et $+$ par $\times$. ■

Propriété 11. Produit télescopique
$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p} \qquad ; \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_p}{a_{n+1}}$$

Démonstration.
$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_{k+1}}{\prod_{k=p}^{n} a_k} \underset{j=k+1}{=} \frac{\prod_{j=p+1}^{n+1} a_j}{\prod_{k=p}^{n} a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p} \times \underbrace{\frac{\prod_{j=p+1}^{n} a_j}{\prod_{k=p+1}^{n} a_k}}_{=1} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

La deuxième en découle puisque $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{a_{k+1}}{a_k}}$. ■

Exercice 12. Calculer : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a^{2k+1}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$.

4. Formule du binôme de Newton

4.1. Notation factorielle.

Définition 8.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel ; on note :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1 \times \cdots \times n & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$n!$ se lit factorielle n.

Exemple.
$0! = 1 \quad ; \quad 1! = 1 \quad ; \quad 2! = 2 \quad ; \quad 3! = 6 \quad ; \quad 4! = 24 \quad ; \quad 5! = 120 \quad ; \quad 6! = 720\,.$

La seule propriété permettant de simplifier le calcul de $n!$ est la suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démonstration. Il suffit de décrocher le dernier terme du produit :

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} k}_{=n!} \times \underbrace{\prod_{k=n+1}^{n+1} k}_{=n+1} = (n+1) \times n! \qquad \blacksquare$$

Exercice 13.
Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{2^n \times n!}{(2n)!}$; en déduire sa convergence puis calculer sa limite.

4.2. Coefficients binomiaux ; triangle de Pascal.

Définition 9.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et k un entier. On définit le <u>*coefficient binomial*</u> $\binom{n}{k}$ *par :*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ *se lit : "*<u>*k parmi n*</u>*".*

Exemples.

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \times 0!} = 1 \quad ; \binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \times 1!} = 1 \quad ; \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \times 0!} = 1$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \times 2!} = 1 \quad ; \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \times 1!} = 2 \quad ; \quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \times 0!} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \times 3!} = 1 \quad ; \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3 \quad ; \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \quad ; \binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \times 0!} = 1$$

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Simplifier :

$$\binom{n}{0} = \qquad ; \quad \binom{n}{n} =$$

$$\binom{n}{1} =$$

$$\binom{n}{2} =$$

2) Montrer que pour tout entier k :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Nous venons d'établir les premières propriétés des coefficients binomiaux :

Propriété 12.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k :
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \textit{(Propriété de symétrie)}$$

Une propriété fondamentale des coefficients binomiaux est la relation de Pascal :

Théorème 13. (Relation de Pascal).
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k :
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Démonstration. On traite séparément les cas où certains coefficients binomiaux sont nuls.

- Premier cas : si $k < 0$; alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} = 0$ et la relation est vérifiée.
- Deuxième cas : si $k = 0$; alors $\binom{n+1}{k} = 1$, $\binom{n}{k-1} = 0$ et $\binom{n}{k} = 1$; la relation est vérifiée.
- Troisième cas : si $k > n+1$; alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} = 0$ et la relation est vérifiée.
- Quatrième cas : si $k = n+1$; alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$;
  la relation est vérifiée.
- Dernier cas : si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \times n!}{k \times (k-1)!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k) \times n!}{(n+1-k) \times k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \times n!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k) \times n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{k \times n! + (n+1-k) \times n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(k+n+1-k) \times n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1) \times n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

Remarque. Le triangle de Pascal.

Les coefficients binomiaux peuvent se représenter et se calculer dans un tableau appelé triangle de Pascal. Sur la première ligne, numérotée 0, on place $1 = \binom{0}{0}$. Les lignes suivantes s'obtiennent grâce à la relation de Pascal de la façon suivante :

chaque élément est la somme de l'élément au dessus et de l'élément au-dessus et à gauche

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \dbinom{n}{k-1} & & \dbinom{n}{k} & \cdots \\ & & \boxed{+} & \downarrow & \\ \cdots & \cdots & & \dbinom{n+1}{k} & \cdots \end{array}$$

Une zone non renseignée comptant pour une valeur nulle. Le $(k+1)$-ème élément de la $(n+1)$ colonne représente alors la valeur de $\binom{n}{k}$:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	k	$\cdots$
0	1								$\vdots$	
1	1	1							$\vdots$	
2	1	2	1						$\vdots$	
3	1	3	3	1					$\vdots$	
4	1	4	6	4	1				$\vdots$	
5	1	5	10	10	5	1			$\vdots$	
6	1	6	15	20	15	6	1		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$								$\vdots$	
n	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\binom{n}{k}$	$\cdots$
$\vdots$										

Exercice 15. Compléter la ligne du triangle de Pascal pour $n = 7$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
6	1	6	15	20	15	6	1	
7								

Une dernière propriété utile est la formule du pion :

Propriété 14. (Formule du pion).
Pour tous entiers k et n avec $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

■

4.3. Formule du binôme.

La formule du binôme de Newton généralise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour développer $(a+b)^n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$. Les coefficients des monômes apparaissant dans le développement sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k variant de 0 à n ; elle est incontournable.

Théorème 15.
Soient a, b deux nombres (réels ou complexes) et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration. Puisque par commutativité de l'addition $(a+b)^n = (b+a)^n$ et par commutativité de la multiplication $a^{n-k}b^k = b^k a^{n-k}$, la deuxième égalité découle de la première.

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(I) pour $n = 0$: $(a+b)^0 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 = 1 = (a+b)^0$$

L'assertion est donc vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&\underset{HR}{=} (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && j = k+1 \ (1^{\text{re}} \text{ somme}) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && k = j \ (1^{\text{re}} \text{ somme}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{relation de Pascal}$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $(n+1)$.

On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

Exemples.

- Pour $n = 1$: $(a+b)^1 = a+b$ et $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b.$$

- Pour $n = 2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- Pour $n = 3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Remarques.

– La somme des exposants de chaque monôme du développement de $(a+b)^n$ est constant égal à $k+(n-k) = n$. Le coefficient devant $a^k b^{n-k}$ (ou $a^{n-k} b^k$) est le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

– On obtient le développement de $(a-b)^n$ en changeant dans la formule b par $-b$. Ainsi :

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Les sommes sont alternées : alternativement $+$, $-$, $+$, $-$, etc.

Exercice 16. Développer (s'aider du triangle de Pascal) :

$(a-b)^3$

$(a-b)^4$

$(2x-1)^5$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-1)^k \times 1^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$; calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times 2^k \binom{n}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \times 2^k \binom{n}{k} =$$

5. Factorisation de $a^n - b^n$

La formule du binôme généralise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ à des exposants autres que 2. Généralisons aussi l'autre identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ à d'autres exposants.

Théorème 16.
Soient a et b deux nombres et $n \in \mathbb{N}^*$; alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Démonstration. Par calcul direct, en partant du membre de droite :

$$\begin{aligned}
(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} && j = k+1 (1^{ere} \text{ somme}) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j} + a^n - \left(b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} \right) && \text{décrochages} \\
&= a^n - b^n + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k}}_{=0} \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

■

Exemples.

$$(a-b)(a+b) = a^2 \overbrace{+ab \underbrace{-ba}_{=0}} - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 \overbrace{+a^2b + ab^2 \underbrace{-ba^2 - ab^2}_{=0}} - b^3 = a^3 - b^3$$

Exercice 18. Factoriser :

$$a^3 - 1 =$$

$$a^4 - b^4 =$$

$$a^5 - b^5 =$$

$$a^3 + b^3 =$$