Chapitre 9

Équations différentielles linéaires

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Partie A. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

1. Équations différentielles du 1er ordre

1.1. Définition ; ensemble des solutions.

Définition 1.
on appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants une équation de la forme :

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

où a et b sont des constantes réelles et y est l'inconnue.
Résoudre (E) revient à déterminer toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ y'(x) + a \times y(x) = b$$

Exemple. La fonction $f : x \longmapsto \exp(x) - 1$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y' - y = 1$$

En effet, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \exp(x)$, et donc pour tout réel x :

$$f'(x) - f(x) = \exp(x) - (\exp(x) - 1) = 1$$

Définition 2.
L'équation différentielle :

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

Exemple. L'équation $y' - y = 0$ est l'équation homogène associée à $y' - y = 1$. La fonction exp en est une solution.

Propriété 1.
Soit l'équation différentielle :

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

et son équation homogène associée :

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

Notons y_p une solution de l'équation (E) . Alors y est solution de E si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de l'équation homogène associée (H).

Démonstration. Soit y_p une solution de l'équation (E). Alors y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p'(x) + ay_p(x) = b \qquad (1)$$

Soit y une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors y est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & y'(x) + ay(x) = b \\ \underset{-(1)}{\Longleftrightarrow}\ & y'(x) + ay(x) - y_p'(x) - ay_p(x) = b - b \\ \Longleftrightarrow\ & (y - y_p)'(x) + a(y - y_p)(x) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de (H). ■

1.2. **Résolution de l'équation homogène.**

Théorème 2.
On considère l'équation homogène :

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

Les solutions de (H) sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ke^{-ax}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante quelconque.

Démonstration.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que $y(x) = ke^{-ax}$ est une solution de (H) ; elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$y'(x) = -ake^{-ax}$$

et donc :

$$y'(x) + ay(x) = -ake^{-ax} + ake^{-ax} = 0$$

Donc y est solution de H.

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que toute solution de (H) est de la forme ke^{-ax} avec $k \in \mathbb{R}$. Soit y une solution, considérons $f(x) = y(x)e^{ax}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et :

$$f'(x) = y'(x)e^{ax} + y(x) \times ae^{ax} = -ay(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = 0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$: il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y(x)e^{ax} = k \implies \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{k}{e^{ax}} = ke^{-ax}$$

Ainsi tout solution de (H) est de la forme $y(x) = ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$. ■

Exercice 1. Résoudre les équations homogènes suivantes :

$$y' = y \qquad ; \qquad y' - 2y = 0$$

Exemple. En cinétique chimique, notons $[A]$ la concentration d'un réactif A en fonction du temps ; la vitesse de la réaction est définie :

$$v = -\frac{d[A]}{dt}.$$

On dit que la réaction est d'ordre 1 si la vitesse est proportionnelle à la concentration, autrement dit :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ v = a \times [A]$$

c'est-à-dire si :

$$\frac{d[A]}{dt} + a[A] = 0$$
$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ [A] = \alpha e^{-at}$$

Connaissant la concentration initiale $[A]_0$ au temps $t = 0$:

$$\alpha e^{-a\times 0} = [A]_0 \implies \alpha = [A]_0$$

ce qui donne l'évolution de la concentration en réactif A au cours du temps :

$$[A] = [A]_0 \times e^{-at}$$

1.3. **Résolution de l'équation complète.**

Théorème 3. Structure des solutions
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle à résoudre :

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

On considère l'équation homogène associée :

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

Les solutions de H sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto ke^{-ax} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Soit y_p une solution quelconque de E, que l'on appelle solution particulière de (E).
Toutes les solutions de (E) sont somme de la solution particulière y_p et d'une solution générale de l'équation homogène associée. Autrement dit, l'ensemble des solutions de E est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto y_p(x) + ke^{-ax} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Soit y_p une solution particulière de l'équation (E). Alors d'après la propriété 4, y est solution de E si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée (H), donc d'après le théorème 2 si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (y - y_p)(x) = ke^{-ax}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + ke^{-ax}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto y_p(x) + ke^{-ax} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

autrement dit toute solution de (E) est somme de la fonction particulière et d'une solution générale (c'est à dire quelconque) de l'équation homogène associée. ∎

Méthode. Pour résoudre l'équation différentielle :

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

On détermine toutes les solutions de l'équation homogène associée :

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

Ce sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Puis on détermine une solution particulière de l'équation (E) :

• Si $a \neq 0$: $y_p(x) = \dfrac{b}{a}$ convient. En effet :

$$y_p'(x) + ay_p(x) = 0 + a \times \frac{b}{a} = b$$

• Si $a = 0$: $y_p(x) = bx$ convient. En effet :

$$y_p'(x) + ay_p(x) = b + 0 \times bx = b$$

Exemple. Résolution de : $y' - y = 2$.
L'équation homogène associée $y' - y = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions $x \longmapsto ke^x$ avec $k \in \mathbb{R}$.
L'équation $y' - y = 2$ admet pour solution particulière la fonction constante égale à 2 : $x \longmapsto 2$. Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}_E = \Big\{x \longmapsto 2 + ke^x \mid k \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Exercice 2. Résoudre :

$$(E_1) : \qquad y' - 3y = 1 \qquad ; \qquad (E_2) : \qquad 3y' = 2$$

2. Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1. Définition et structure des solutions.

Définition 3.
On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, toute équation de la forme :*

$$y'' + ay' + by = c \qquad (E)$$

où (a, b, c) sont des constantes réelles et y est l'inconnue.

Résoudre (E) revient à déterminer toutes les fonctions y deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c$$

Comme pour le premier ordre, on associe à une équation différentielle linéaire du second ordre une équation homogène :

Définition 4.
L'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

De même que pour le premier ordre, les solutions de l'équation de (E) se décomposent en la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution générale de (H) :

Propriété 4.
Soit l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = c \qquad (E)$$

et son équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

Notons y_p une solution de l'équation (E) . Alors y est solution de E si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de l'équation homogène associée (H).
En particulier toutes les solutions de (E) s'obtiennent comme somme d'une solution particulière y_p de (E) et d'une solution générale de (H).

Démonstration. Soit y_p une solution de l'équation (E). Alors y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) = c \qquad (1)$$

Soit y une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors y est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & y''(x) + ay'(x) + by(x) = c \\ \underset{-(1)}{\iff} & y''(x) + ay'(x) + by(x) - y_p''(x) - ay_p'(x) - by_p(x) = c - c \\ \iff & (y - y_p)''(x) + a(y - y_p)'(x) + b(y - y_p)''(x) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de (H). ■

Encore une fois pour résoudre (E) il suffit de savoir déterminer une seule solution (particulière) de l'équation (E) et toutes les solutions (générales) de l'équation homogène associée.

Méthode. Pour déterminer une solution particulière de :

$$y'' + ay' + by = c \qquad (E)$$

- Si $b \neq 0$, $y_p(x) = \dfrac{c}{b}$ convient.

  En effet : $y_p' = y_p'' = 0 \implies y_p'' + ay_p' + by_p = b \times \dfrac{c}{b} = c$.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, $y_p(x) = \dfrac{c}{a}x$ convient.

  En effet : $y_p' = \dfrac{c}{a}$, $y_p'' = 0 \implies y_p'' + ay_p' + by_p = 0 + a \times \dfrac{c}{a} + 0 = c$.
- Si $a = b = 0$, $y_p(x) = \dfrac{c}{2}x^2$ convient.

  En effet : $y_p'' = c \implies y_p'' + ay_p' + by_p = c + 0 + 0 = c$.

2.2. **Résolution de l'équation homogène.**

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

On commence par chercher les solutions de (H) sous la forme $f : x \longmapsto e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$. Alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = re^{rx} \qquad ; \quad f''(x) = r^2 e^{rx}$$

Ainsi f est solution de (H) si et seulement si :

$$\begin{aligned} & r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0 \\ \underset{e^{rx} \neq 0}{\iff} & r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

On appelle équation caractéristique l'équation :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. C'est une équation du second degré dont le discriminant est : $\Delta = a^2 - 4b$.

La fonction f est solution de (H) si et seulement si r est solution de (EC).

On considère 3 cas selon que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

- Si $\Delta > 0$. L'équation (EC) admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad ; \qquad r_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

et la fonction $x \longmapsto e^{r_1 x}$ est une solution de (H). Cherchons les autres solutions de (H) sous la forme : $y(x) = e^{r_1 x} \times z(x)$ avec z deux fois dérivable (il suffit de prendre $z(x) = y(x)e^{-r_1 x}$). Ainsi, puisque :

$$\begin{aligned} (e^{r_1 x} \times z(x))' &= r_1 e^{r_1 x} \times z(x) + e^{r_1 x} \times z'(x) \\ (e^{r_1 x} \times z(x))'' &= r_1^2 e^{r_1 x} \times z(x) + 2r_1 e^{r_1 x} \times z'(x) + e^{r_1 x} \times z''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y(x) = e^{r_1 x} \times z(x) \text{ est solution de } (H) \\ \iff & r_1^2 e^{r_1 x} \times z(x) + 2r_1 e^{r_1 x} \times z'(x) + e^{r_1 x} \times z''(x) + a\left(r_1 e^{r_1 x} \times z(x) + e^{r_1 x} \times z'(x)\right) \\ & \qquad + be^{r_1 x} \times z(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\underset{e^{r_1 x}\neq 0}{\Longleftrightarrow} r_1^2 \times z(x) + 2r_1 \times z'(x) + z''(x) + a\,(r_1 \times z(x) + z'(x)) + b \times z(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow z''(x) + (2r_1 + a) \times z'(x) + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} \times z(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow z''(x) + (2r_1 + a) \times z'(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ z'(x) = ke^{-(2r_1+a)x}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (k, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2,\ z(x) = \frac{k}{-(2r_1+a)} \times e^{-(2r_1+a)x} + \lambda_1$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ z(x) = \lambda_2 \times e^{-(2r_1+a)x} + \lambda_1 \qquad \text{en posant } \lambda_2 = \frac{k}{-(2r_1+a)}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{(-2r_1 - a + r_1)x} \qquad \text{car } y(x) = z(x)e^{r_1 x}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{(-r_1 - a)x}$$

$$\text{or : } -r_1 - a = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} - a = \frac{a + \sqrt{\Delta} - 2a}{2} = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} = r_2$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

avec r_1, r_2 les deux racines réelles de l'équation caractéristique (EC), et λ_1, λ_2 deux constantes réelles quelconques.

• Si $\Delta = 0$.

L'équation caractéristique (EC) admet une solution réelle :

$$r_0 = -\frac{a}{2}$$

et la fonction $x \longmapsto e^{r_0 x}$ est une solution de (H). Cherchons les autres solutions de (H) sous la forme : $y(x) = e^{r_0 x} \times z(x)$ avec z deux fois dérivable. Le même calcul que dans le cas $\Delta > 0$ montre que y est solution de (H) si et seulement si :

$$\underbrace{(r_0^2 + ar_0 + b)}_{=0} e^{r_0 x} \times z(x) + \underbrace{(2r_0 + a)}_{=0} e^{r_0 x} \times z'(x) + e^{r_0 x} \times z''(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow e^{r_0 x} \times z''(x) = 0 \underset{e^{r_0 x}\neq 0}{\Longleftrightarrow} z''(x) = 0 \Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ z(x) = \lambda x + \mu$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = (\lambda x + \mu) \times e^{r_0 x}$$

• Si $\Delta < 0$.

Dans ce cas l'équation caractéristique (EC) admet deux solutions complexes conjugués :

$$r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta \qquad ; \qquad r_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$$

Le même calcul que précédemment montre que les solutions de (H) sont les fonctions <u>à valeurs réelles</u> pouvant s'écrire sous la forme :

$$y : x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction de la forme :
$$f : x \longmapsto f_R(x) + \mathrm{i} \cdot f_I(x) \quad \text{avec } f_R \text{ et } f_I \text{ deux fonctions à valeurs réelles}$$
Elle est dite dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si ses partie réelle f_R et partie imaginaire f_I sont des fonctions dérivables sur I, et dans ce cas sa fonction dérivée est :
$$f' : x \longmapsto f_R'(x) + \mathrm{i}\, f_I'(x)$$
C'est une fonction réelle à valeur dans $\mathbb{C}$, définie sur I.
Il est facile de vérifier que les propriétés algébriques de la dérivée restent vraies pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, notamment :
$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f \times g)' = f'g + fg' \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda f)' = \lambda f'$$
et pour la composition, si $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$:
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Exemples :
– La fonction :
$$f : x \longmapsto e^{\mathrm{i}\,x} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :
$$f' : x \longmapsto -\sin(x) + \mathrm{i}\,\cos(x)$$
Or :
$$-\sin(x) + \mathrm{i}\,\cos(x) = \cos(x+\pi/2) + \mathrm{i}\,\sin(x+\pi/2) = e^{\mathrm{i}\,(x+\frac{\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\,x} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,x}$$
Ainsi :
$$\boxed{\left(e^{\mathrm{i}\,x}\right)' = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,x}}$$
– Soit $r = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe :
$$f : x \longmapsto e^{rx} = e^{(a+\mathrm{i}\,b)x} = e^{ax} \times e^{\mathrm{i}\,bx}$$
est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée est donnée par :
$$f'(x) = ae^{ax} \times e^{\mathrm{i}\,bx} + e^{ax} \times \mathrm{i}\,be^{\mathrm{i}\,bx} = (a+\mathrm{i}\,b)e^{ax} \times e^{\mathrm{i}\,bx} = (a+\mathrm{i}\,b) \times e^{(a+\mathrm{i}\,b)x}$$
Ainsi :
$$\boxed{\forall r \in \mathbb{C},\ (e^{rx})' = re^{rx}}.$$

Revenons à la démonstration, donc soit y une solution de (H) :
$$y : x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$
Mais y étant à valeurs réelles :
$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \overline{y(x)} \\
&\iff \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = \overline{\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}} \\
&\iff \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = \overline{\lambda_1}\,\overline{e^{r_1 x}} + \overline{\lambda_2}\,\overline{e^{r_2 x}}
\end{aligned}$$
Or : $\begin{cases} \overline{e^{r_1 x}} = \overline{e^{\alpha x}} \times \overline{e^{\mathrm{i}\,\beta x}} = e^{\alpha x} \times e^{-\mathrm{i}\,\beta x} = e^{(\alpha - \mathrm{i}\,\beta)x} = e^{r_2 x} \\ \overline{e^{r_2 x}} = \overline{e^{\alpha x}} \times \overline{e^{-\mathrm{i}\,\beta x}} = e^{\alpha x} \times e^{\mathrm{i}\,\beta x} = e^{(\alpha + \mathrm{i}\,\beta)x} = e^{r_1 x} \end{cases}$
$$\begin{aligned}
&\iff \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = \overline{\lambda_1} e^{r_2 x} + \overline{\lambda_2} e^{r_1 x} \\
&\iff e^{r_1 x}\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) = e^{r_2 x}\left(\overline{\lambda_1} - \lambda_2\right) \\
&\iff \underbrace{e^{(r_1 - r_2)x}}_{\text{non constant}} \times \left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) = \underbrace{\left(\overline{\lambda_1} - \lambda_2\right)}_{\text{constant}}
\end{aligned}$$

Or le membre de droite étant constant, il en est de même du membre de gauche. Mais puisque $r_1 - r_2 \neq 0$, $e^{(r_1-r_2)x}$ n'est pas constant ; la seule possibilité est alors :

$$\lambda_1 - \overline{\lambda_2} = \overline{\lambda_1} - \lambda_2 = 0 \implies \overline{\lambda_1} = \lambda_2$$

Posons alors deux réels A, B tels que :

$$\lambda_1 = A + \mathrm{i}\, B \qquad ; \qquad \lambda_2 = A - \mathrm{i}\, B$$

Alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= (A + \mathrm{i}\, B)e^{(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)x} + (A - \mathrm{i}\, B)e^{(\alpha-\mathrm{i}\,\beta)x} \\ &= e^{\alpha x} \times \left(A\left(e^{\mathrm{i}\,\beta x} + e^{-\mathrm{i}\,\beta x}\right) + \mathrm{i}\, B\left(e^{\mathrm{i}\,\beta x} - e^{-\mathrm{i}\,\beta x}\right)\right) \\ &= e^{\alpha x} \times (2A\cos(\beta x) - 2B\sin(\beta x)) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\lambda = 2A$ et $\mu = -2B$, les solutions de (H) sont toutes les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto e^{\alpha x} \times (\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$$

avec $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ une solution de (EC) et λ, μ deux réels quelconques.

Finalement on vient de prouver :

Théorème 5.
Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On lui associe l'équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{EC}$$

ayant pour discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions de (H) sont toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ de la forme :

- *Si $\Delta > 0$: (EC) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si $\Delta = 0$: (EC) admet une solution réelle r_0 et*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si $\Delta < 0$: (EC) admet deux solutions complexes conjuguées et*

$$y(x) = e^{\alpha x}\,(\lambda\,\cos(\beta x) + \mu\,\sin(\beta x)) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

où $\alpha + i\beta$ est une solution quelconque de (EC).

Exemples.

- L'équation de l'oscillateur harmonique.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et l'équation :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Cette équation différentielle est très utilisée en physique (mécanique, électricité,. . .) pour décrire certaines évolutions périodiques au voisinage d'un point d'équilibre et en l'absence de frottement, par exemple le mouvement d'un système masse-ressort, ou les oscillations libres d'un circuit LC.

Soit (EC) l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

Alors $\Delta = -4\omega^2 = (2\mathrm{i}\,\omega)^2$ et les solutions sont les complexes conjugués $r_1, r_2 = \pm\mathrm{i}\,\omega$. Ainsi les solutions sont toutes les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^0 \times (\lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t) \\ &= \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t \\ &= \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \times \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

c'est une sinusoïde d'amplitude $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, de pulsation ω et de déphasage ϕ dépendant de λ et μ (λ et μ sont déterminés à l'aide des conditions initiales du système).

• Résolution de l'équation :

$$y'' - 6y' + 13y = 5 \qquad (E)$$

L'équation homogène $(H)\ :\ y'' - 6y' + 13y = 0$ a pour équation caractéristique :

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4\mathrm{i}\,)^2$ et les solutions : $r_1, r_2 = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Les solutions de (H) sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y_H : x \longmapsto e^{3x} \times (\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)) \quad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

D'autre part la fonction $y_p : x \longmapsto \dfrac{5}{13}$ est une solution particulière de l'équation (E). Ainsi toutes les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto \frac{5}{13} + e^{3x} \times (\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)) \ \mid\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles :

$$y'' - 3y' + 2y = 1 \quad (E_1) \qquad y'' - 4y' + 4y = 8 \quad (E_2) \qquad y'' - 2y' + 2y = 2 \quad (E_3)$$

Partie B. Équations différentielles linéaires.

Dans cette partie, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

3. Équations différentielles linéaires du 1er ordre

3.1. Définition ; structure des solutions.

Définition 5.
Soient I un intervalle et $x \longmapsto a(x)$, $x \longmapsto b(x)$ deux fonctions continues sur I. L'équation :

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

est appelé <u>équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre</u> ; ses solutions sont toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ dérivables sur I et vérifiant :

$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x) \times y(x) = b(x)$$

Exemple. La fonction $y : x \longmapsto e^{x^2} - \frac{1}{2}$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = x$$

En effet : y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'(x) = 2xe^{x^2}$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2xy(x) = 2xe^{x^2} - 2x\left(e^{x^2} - \frac{1}{2}\right) = -2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) = x$$

Remarque. Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est une cas particulier où les fonctions $x \longmapsto a(x)$ et $x \longmapsto b(x)$ sont constantes.

Définition 6. *L'équation homogène associée à l'équation (E) est l'équation homogène :*

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H)$$

Le résultats établis lorsque les coefficients sont constants, se généralisent ici.

Propriété 6.
Sous les mêmes hypothèses, en notant y_p une solution particulière de (E), toutes les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution particulière y_p est des solutions générales de l'équation homogène associée (H).

$$\mathscr{S} = \left\{ y = y_p + y_H \mid y_H \text{ est une solution de } (H) \right\}$$

Démonstration. Elle est quasiment identique à celle effectuée dans le cas de coefficients constants : soit y_p une solution particulière de (E) :

(1) $$y_p' + a(x)y_p = b(x)$$

alors y est solution de (E) si et seulement si :

$$y' + a(x)y = b(x) \underset{-(1)}{\iff} y' - y_p' + a(x)(y - y_p) = 0 \iff (y - y_p) \text{ est solution de } (H)$$

■

Il s'agit donc pour résoudre l'équation de déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée (H) et une solution particulière de l'équation (E).

Théorème 7.
Les solutions de l'équation (H) :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H)$$

sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = k\,e^{-A(x)}$$

où k est une constante réelle et $x \longmapsto A(x)$ est une primitive (quelconque) de $x \longmapsto a(x)$

Remarque. On peut écrire :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto k\,e^{-\int a(x)dx} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. Puisque $x \longmapsto a(x)$ est continue sur I, elle admet des primitives sur I. Soit $A(x)$ une primitive de $a(x)$; cherchons les solutions de (H) sous la forme $y(x) = f(x)e^{-A(x)}$ avec $x \longmapsto f(x)$ une fonction dérivable sur I ; c'est toujours possible en posant $f(x) = y(x) \times e^{A(x)}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
& y'(x) = f'(x)e^{-A(x)} - a(x)f(x)e^{-A(x)} \\
\Longrightarrow\ & y \text{ est solution de } (H) \text{ si et seulement si :} \\
& y'(x) + a(x)y(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \underbrace{f'(x)e^{-A(x)} - a(x)f(x)e^{-A(x)}}_{=y'(x)} + \underbrace{a(x)f(x)e^{-A(x)}}_{=a(x)y(x)} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & f'(x)e^{-A(x)} = 0 \\
\underset{\times e^{A(x)}}{\Longleftrightarrow}\ & f'(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = k
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto ke^{-A(x)}$ avec $k \in \mathbb{R}$. ■

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad (H)$$

La fonction définie par $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet pour primitive $A(x) = -\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \longmapsto ke^{-(-\ln(x))} = kx$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

3.2. **Recherche d'une solution particulière.**

3.2.1. *Méthode de variation de la constante.*

On cherche une solution particulière de l'équation :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$

sous la forme :

$$y(x) = k(x)e^{-A(x)}$$

avec $x \longmapsto A(x)$ une primitive de $x \longmapsto a(x)$ sur I et $x \longmapsto k(x)$ une fonction dérivable sur I.

Remarque. C'est à dire de la forme d'une solution de (H) où on aurait remplacé la constante par une fonction dérivable sur I ; d'où le nom de méthode de variation de la constante.

Alors :

$$y'(x) = k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)}$$

Ainsi y est solution de E sur I si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \overbrace{k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)}}^{=y'(x)} + \overbrace{a(x)k(x)e^{-A(x)}}^{=a(x)y(x)} = b(x) \\ \Longleftrightarrow\ & k'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \underset{\times e^{A(x)}}{\Longleftrightarrow}\ & k'(x) = b(x)e^{A(x)} \\ \Longleftrightarrow\ & k(x) \text{ est une primitive de } b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Or $x \longmapsto b(x)e^{A(x)}$ est continue sur I, comme produit de composées de fonctions continues sur I, et donc elle admet bien une primitive sur I. Ainsi :

Méthode de variation de la constante.
l'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

admet pour solution particulière toute fonction de la forme :

$$y_p : x \longmapsto k(x)e^{-A(x)} \quad \textit{avec} \quad k(x) = \int b(x)e^{+A(x)}dx.$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

La recherche d'une solution particulière se ramène alors à un calcul de primitive, ce qui est deja plus simple.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y' + xy = x$$

L'équation homogène associée (H) : $y' + xy = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto k\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière de (E), par la méthode de variation de la constante.

Soit : $y_p(x) = k(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ avec :

$$k(x) = \int x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Ainsi :

$$y_p(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1$$

Les solutions de (E) sont donc toutes les fonctions dans l'ensemble :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

3.2.2. *Principe de superposition des solutions.*

Lorsque le second membre de l'équation se décompose en somme, la recherche d'une solution particulière peut se faire en sommant (superposant) les solutions particulières d'équations plus simples :

Propriété 8.
Si (E) est de la forme :

$$y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) \tag{E}$$

avec a, b_1, b_2, $\ldots b_n$ des fonctions continues sur I, alors en notant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$y' + a(x)y = b_i(x) \tag{E_i}$$

et f_i une solution particulière de (E_i), la fonction :

$$y_p = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

est une solution particulière de (E).

Démonstration. Elle découle de la linéarité de la dérivation :

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$

et de la linéarité de l'équation :

$$\left.\begin{array}{c} f_1'(x) + a(x)f_1(x) = b_1(x) \\ f_2'(x) + a(x)f_2(x) = b_2(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) + a(x)f_n(x) = b_n(x) \end{array}\right\} \underset{\Sigma}{\Longrightarrow} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(x) + a(x)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) + a(x)y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)$$

ainsi y_p est solution particulière de (E). ∎

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y' - y = x + \cos(x) \tag{E}$$

L'équation homogène associée (H) : $y' - y = 0$ a pour solutions toutes les fonctions $x \longmapsto ke^x$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière en appliquant le principe de superposition des solutions :

– L'équation (E_1) : $y' - y = x$ a pour solution particulière :

$$y_1 = k(x)e^x \quad \text{avec} \quad k(x) = \int xe^{-x}dx$$

Par une intégration par partie :

$$k(x) = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} \qquad \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array}\right.$$

donc $y_1(x) = (-x-1) \times e^{-x} \times e^x = -x - 1$.

– L'équation (E_2) : $y' - y = \cos(x)$ a pour solution particulière :

$$y_2 = k(x)e^x \quad \text{avec} \quad k(x) = \int \cos(x)e^{-x}dx$$

Par intégration par partie :

$$\begin{aligned}
k(x) &= -\cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x}dx && \left| \begin{array}{ll} u = \cos(x) & u' = -\sin(x) \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right. \\
&= -\cos(x)e^{-x} - \left(-\sin(x)e^{-x} - \int -\cos(x)e^{-x}dx\right) && \left| \begin{array}{ll} u = \sin(x) & u' = \cos(x) \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right. \\
&= (\sin(x) - \cos(x))e^{-x} - k(x) \\
\implies 2k(x) &= (\sin(x) - \cos(x))e^{-x} \\
\implies k(x) &= \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^{-x}
\end{aligned}$$

donc $y_2(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) \times e^{-x} \times e^{x} = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ainsi (E) a pour solution particulière :

$$y_p(x) = -1 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto -1 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + ke^{x} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 4. Résoudre :

$$y' - 3x^2y = x^5e^{x^3} \qquad (E)$$

$$y' + \tan(x) \times y = \sin(2x) \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad (E')$$

$$y' + \tan(x) \times y = \sin(2x) + \cos(x) \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad (E'')$$

4. Équations du 2^{nd} ordre à coefficients constants et second membre non constant

4.1. Structure des solutions.

On s'intéresse dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle de la forme :

$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x \longmapsto c(x)$ une fonction continue sur un intervalle I.
Une solution de (E), est une fonction définie et deux fois dérivable sur I, tel que :

$$\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

Les solutions ont même structure que dans le cas où le second membre est constant :

Théorème 9.
Avec les mêmes notations : on associe à (E) l'équation homogène :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (E) ; les solutions de (E) sont toutes les fonctions y de la forme :

$$y = y_p + y_H \quad \text{avec} \begin{cases} y_p \text{ la solution particulière de } (E) \\ y_H \text{ une solution générale de } (H) \end{cases}$$

Démonstration. Soit y_p une solution de (E) ; ainsi :

(1) $$\forall x \in I, \quad y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) = c(x)$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Alors y est solution de (E) si et seulement si :

(2) $$\forall x \in I, \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

et donc en formant $(2) - (1)$, si et seulement si :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) - \big(y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)\big) = c(x) - c(x)$$

$$\iff (y - y_p)''(x) + a(y - y_p)'(x) + b(y - y_p)(x) = 0 \qquad \text{par linéarité de la dérivation}$$

$$\iff (y - y_p) \text{ est solution de } (H)$$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p = y_H$ où y_H est une solution de (H), si et seulement si $y = y_p + y_H$ avec y_H une solution de l'équation homogène (H).■

Propriété 10. Principe de superposition des solutions. *Soit l'équation :*

$$y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x) + \cdots + c_n(x) \qquad (E)$$

avec $c_1, c_2, \dots c_n$ des fonctions continues sur un intervalle I. En notant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$y'' + ay' + by = c_i(x) \qquad (E_i)$$

et f_i une solution particulière de (E_i), la fonction :

$$y_p = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

est une solution particulière de (E).

Démonstration. Comme dans le cas de l'ordre 1, elle découle facilement de la linéarité de l'équation et de la linéarité de la dérivation, appliquée ici deux fois :

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$
$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'' = f_1'' + f_2'' + \cdots + f_n''$$

■

4.2. **Recherche d'une solution particulière.**

Déterminer une solution particulière lorsque le second membre n'est pas constant est un problème difficile. Nous n'étudierons pas de méthode de résolution générale.

On cherche le plus souvent une solution particulière ayant une forme analogue au second membre. Hormis dans les cas très simples, durant un exercice l'énoncé proposera sous quelle forme chercher une solution particulière. Dans la grande majorité des cas on se retrouvera dans l'un des cas particuliers listé ci-après.

Dans toute la suite on considère l'équation :

$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$

et son équation caractéristique associée :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

de discriminant Δ.
On dira que :

Pour un réel α, son ordre de multiplicité $m(\alpha)$ en tant que solution de (EC) est :
– $m(\alpha) = 0$: si α n'est pas solution de (EC).
– $m(\alpha) = 1$: si α est solution de (EC) et $\Delta \neq 0$ (i.e; si α est une solution simple).
– $m(\alpha) = 2$: α est solution de (EC) et $\Delta = 0$ (i.e. si α est une solution double).

Pour trouver une solution particulière lorsque le second membre $c(x)$ est :

• *Un polynôme de degré n.*
Chercher une solution particulière de la forme :

$$x^{m(0)} \times P(x)$$

où :
– $P(x)$ est un polynôme de même degré n que le second membre,
– $m(0)$ est l'ordre de multiplicité de 0 dans (EC).

Exemples.

• Résoudre :

$$y'' - 2y + y = x^2$$

L'équation homogène associée est (H) : $y'' - 2y' + y = 0$ d'équation caractéristique (EC) : $r^2 - 2r + 1 = 0$. On a $\Delta = 0$ et une seule solution de (EC) qui est 1.
Ainsi (H) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^x$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

Alors :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \\ \Longrightarrow y_p \text{ est solution de } (E) &\text{ ssi } y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2\\
&\iff (2a - 2b + c) + (b - 4a)x + ax^2 = x^2\\
&\iff \begin{cases} 2a - 2b + c = 0 \\ b - 4a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = x^2 + 4x + 6$ et les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^x + x^2 + 4x + 6 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Résoudre :

$$y'' + y' = x^2$$

L'équation homogène associée est (H) : $y'' + y' = 0$ d'équation caractéristique (EC) : $r^2 + r = 0$. On a $\Delta > 0$ et pour solutions réelles 0 et -1.

Ainsi (H) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda + \mu e^{-x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Puisque 0 a pour ordre de multiplicité 1 dans (EC), cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = x \times (ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\\
&y_p''(x) = 6ax + 2b\\
&\Longrightarrow y_p \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } y_p''(x) + y_p'(x) = x^2\\
&\iff 6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2\\
&\iff (2b + c) + (6a + 2b)x + 3ax^2 = x^2\\
&\iff \begin{cases} 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ et les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto \lambda + \mu e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *$P(x) \times e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n.*
Chercher une solution particulière de la forme :

$$x^{m(\alpha)} \times Q(x) \times e^{\alpha x}$$

où :
– $Q(x)$ est un polynôme de même degré n que $P(x)$,
– $m(\alpha)$ est l'ordre de multiplicité de α dans (EC).

Exemples.

- Résoudre :

$$y'' - y = e^x$$

L'équation homogène associée est $(H) : y'' - y = 0$ d'équation caractéristique (EC) : $r^2 - 1 = 0$. On a $\Delta > 0$ et pour solutions réelles -1 et 1.

Ainsi (H) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Puisque 1 a pour ordre de multiplicité 1 dans (EC), cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = x \times a \times e^x$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&y_p'(x) = ae^x + axe^x = ae^x(1+x)\\
&y_p''(x) = ae^x + ae^x(1+x) = ae^x(2+x)\\
\Longrightarrow\ &y_p \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } y_p''(x) - y_p(x) = e^x\\
\Longleftrightarrow\ &ae^x(2+x) - axe^x = e^x\\
\Longleftrightarrow\ &2ae^x = e^x\\
\Longleftrightarrow\ &a = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ainsi une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$ et les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- *Une fonctions circulaire $k\sin(\omega x)$ ou $k\cos(\omega x)$.*

Chercher une solution particulière sous la forme :

$$a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$$

lorsque $i\omega$ n'est pas une solution de (EC).

Sinon, la chercher sous la forme :

$$ax\sin(\omega x) + bx\cos(\omega x).$$

avec a et b à déterminer.

Remarque. Ce cas se ramène en fait au cas précédent une fois remarqué que :

$$\sin(\omega x) = Im(e^{\mathrm{i}\omega x}) \quad ; \quad \cos(\omega x) = Re(e^{\mathrm{i}\omega x})$$

et qu'une solution particulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ donne une solution particulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en considérant sa partie réelle/imaginaire.

Exemple.

- Résoudre :

$$y'' + y = \sin(2x) + \cos(x) \qquad (E)$$

L'équation homogène associée est : $(H) : y'' + y = 0$ d'équation caractéristique (EC) : $r^2 + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta < 0$ et ses deux solutions sont les complexes conjugués : $\pm\mathrm{i}$. Ainsi les solutions de (H) sont :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Pour déterminer une solution particulière on applique le principe de superposition des solutions ; soient :

$$y'' + y = \sin(2x) \quad (E_1) \qquad ; \qquad y'' + y = \cos(x) \quad (E_2)$$

– Solution particulière de (E_1). Puisque $2\mathrm{i}$ n'est pas solution de (EC), on cherche une solution particulière sous la forme $y_1(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) \\ y_1''(x) &= -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) \end{aligned}$$

ainsi y_1 est solution de (E_1) si et seulement si $y_1'' + y_1 = \sin(2x)$

$$\begin{aligned} &\iff \overbrace{-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)}^{=y_1''} + \overbrace{a\cos(2x) + b\sin(2x)}^{=y_1} = \sin(2x) \\ &\iff -3a\cos(2x) - 3b\sin(2x) = \sin(2x) \\ &\iff (a,b) = \left(0, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

La fonction $y_1(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x)$ est donc une solution particulière de (E_1).

– Solution particulière de (E_2). Puisque i $\times$ 1 est solution de (EC), on cherche une solution particulière sous la forme : $y_2(x) = ax\cos(x) + bx\sin(x)$; ainsi :

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= a\cos(x) + b\sin(x) - ax\sin(x) + bx\cos(x) \\ y_2''(x) &= -a\sin(x) + b\cos(x) - a\sin(x) + b\cos(x) - ax\cos(x) - bx\sin(x) \\ &= -2a\sin(x) + 2b\cos(x) - ax\cos(x) - bx\sin(x) \end{aligned}$$

ainsi y_2 est solution de (E_2) si et seulement si : $y_2'' + y_2 = \cos(x)$

$$\begin{aligned} &\iff \overbrace{-2a\sin(x) + 2b\cos(x) - ax\cos(x) - bx\sin(x)}^{=y_2''} + \overbrace{ax\cos(x) + bx\sin(x)}^{=y_2} = \cos(x) \\ &\iff -2a\sin(x) + 2b\cos(x) = \cos(x) \\ &\iff (a,b) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $y_2(x) = \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution particulière de (E_2).

Finalement, d'après le principe de superposition des solutions, la fonction $y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\sin(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' - 2y = e^x \qquad (E_1)$$
$$y'' - 2y' + y = (x-1)e^x \qquad (E_2)$$

Pour trouver une solution particulière on se ramènera aux cas particuliers exposés ci-dessus.