Chapitre 20
Variables aléatoires réelles

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

1. Variables aléatoires

1.1. Définitions et notations.

Définition 1.
• *Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$; on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé V.A.R) sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.*
$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
• *L'ensemble des images par X est noté :*
$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$
et appelé l'univers image de X.

Remarque. Une V.A.R. est une quantité numérique qui varie en fonction des résultats d'une expérience aléatoire.

Exemples.

• On lance deux dés 6 ; on prend comme univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Soit par exemple $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe la somme des 2 dés :
$$X((1,2)) = 3\ ; X((3,4)) = 7\ ; \text{etc. } ; X((a,b)) = a+b \qquad X(\Omega) = [\![2,12]\!].$$
• On tire successivement et sans remise 4 boules dans une urne en contenant initialement 5 blanches et 10 noires. On choisit pour univers l'ensemble des 4-listes sans répétition des 15 boules.

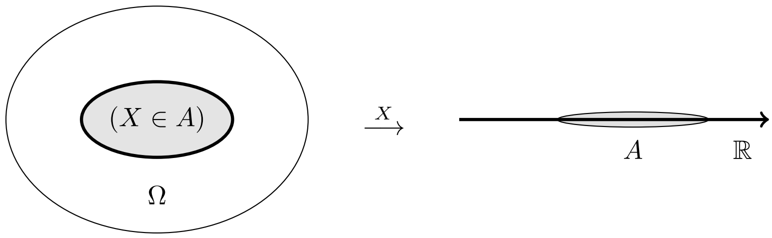
Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe le nombre de boules blanches obtenues. Son univers image est $X(\Omega) = [\![0,4]\!]$.

Si on ne tire plus 4 boules, mais 6, l'univers image devient $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$: on ne peut pas obtenir plus de 5 blanches.

Si cette fois-ci on ne tire plus 6 boules mais 11, l'univers image devient $X(\Omega) = [\![1,5]\!]$: on ne peut pas obtenir plus de 5 blanches. Mais on ne peut pas non plus obtenir plus de 10 noires ; on aura donc au moins une blanche.

Définition 2. *Avec les mêmes notations, si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $(X \in A)$ l'événement de Ω :*
$$(X \in A) = \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\Big\}.$$

Illustration.



Exemple. Reprenons l'exemple du lancer de deux dés ; X est la V.A.R. désignant la somme des deux dés.

Soit $A = \{2, 3\} \subset \mathbb{R}$;

$$(X \in A) = \Big\{\omega \in [\![1, 6]\!]^2 \mid X(\omega) \in A\Big\} = \Big\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\Big\} \subset \Omega$$

est l'événement : "la somme des dés est $\leqslant 3$".

Définition 3. *Avec les mêmes notations ; soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:*

- $(X = a)$ *désigne l'événement* $(X \in \{a\}) = \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\Big\}$,
- $(X > a)$ *désigne l'événement* $(X \in]a, +\infty[) = \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\Big\}$,
- $(X \geqslant a)$ *désigne l'événement* $(X \in [a, +\infty[) = \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\Big\}$,
- $(a \leqslant X \leqslant b)$ *désigne l'événement* $(X \in [a, b]) = \Big\{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\Big\}$,

etc.

Remarque. On pourra rencontrer aussi les notations $[X = a]$ ou $\{X = a\}$, etc.

Exercice 1. Reprenons l'exemple du lancer de deux dés ; X est la V.A.R. désignant la somme des deux dés.

$$X : \begin{array}{rcl} [\![1, 6]\!]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i, j) & \longmapsto & i + j \end{array}$$

Décrire le éléments des évènements $(X = 4)$, $(X \geqslant 10)$, $(2 \leqslant X \leqslant 3)$ et $(X \leqslant 1)$.

Résolution.

Remarque. Une V.A.R. est une quantité numérique variant en fonction des résultats d'une expérience aléatoire. Bien choisie elle permet une description simple d'événements liés à cette quantité.

1.2. Exemple : indicatrice d'une partie.

Définition 4.
• *Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$; pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on appelle <u>indicatrice de A</u> l'application notée χ_A ou $\mathbb{1}_A$ et définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

C'est une variable aléatoire sur Ω d'univers image

$$\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$$

et vérifiant :

$$(\mathbb{1}_A = 1) = A \quad ; \quad (\mathbb{1}_A = 0) = \overline{A}$$

Propriété 1.
Soient A et B deux parties de Ω ; alors les indicatrices de leur intersection, réunion et complémentaire s'obtiennent à partir de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ par les formules :
• $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
• $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
• $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Démonstration.

• $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ sont deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$ et quelque soit $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B(\omega) = 1 \iff \begin{cases} \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \\ \text{et} \\ \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \omega \in A \\ \text{et} \\ \omega \in B \end{cases} \iff \omega \in A \cap B \iff \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1.$$

Ainsi $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

• $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ sont deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$ et quelque soit $\omega \in \Omega$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 \iff \omega \in \overline{A} \iff \omega \notin A \iff \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \\ \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0 \iff \omega \notin \overline{A} \iff \omega \in A \iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \end{array}\right\} \implies \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

Ainsi : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

• D'après ce qui précède :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} = \mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_{\overline{B}} = (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = 1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$$

Puisque $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, on a alors :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$$

■

Exemple. On lance un dé 6 ; soit $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et les évènements :
$A = [\![3, 6]\!]$: "obtenir un résultat $\geqslant 3$",
$B = \{2, 4, 6\}$: "obtenir un résultat pair".

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 0 \\ 3 \longmapsto 1 \\ 4 \longmapsto 1 \\ 5 \longmapsto 1 \\ 6 \longmapsto 1 \end{array} \quad \mathbb{1}_B : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 1 \\ 3 \longmapsto 0 \\ 4 \longmapsto 1 \\ 5 \longmapsto 0 \\ 6 \longmapsto 1 \end{array} \quad \mathbb{1}_{A\cap B} : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 0 \\ 3 \longmapsto 0 \\ 4 \longmapsto 1 \\ 5 \longmapsto 0 \\ 6 \longmapsto 1 \end{array} \quad \mathbb{1}_{A\cup B} : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 1 \\ 3 \longmapsto 1 \\ 4 \longmapsto 1 \\ 5 \longmapsto 1 \\ 6 \longmapsto 1 \end{array} \quad \mathbb{1}_{\overline{A}} : \begin{array}{l} 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 1 \\ 3 \longmapsto 0 \\ 4 \longmapsto 0 \\ 5 \longmapsto 0 \\ 6 \longmapsto 0 \end{array}$$

1.3. **Loi de probabilité d'une variable aléatoire.**

Définition 5. *Étant donné une V.A.R. X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, on appelle loi de probabilité de X (ou loi de X) l'application :*

$$\begin{array}{rcl} f_X : X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}.$$

Remarque. Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les valeurs prises par X, alors donner la loi de X revient à donner l'univers image $X(\Omega)$ et les valeurs des probabilités :

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

pour tout $k = 1, \dots, n$. On peut présenter la loi de X dans un tableau, le tableau de la loi de X :

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

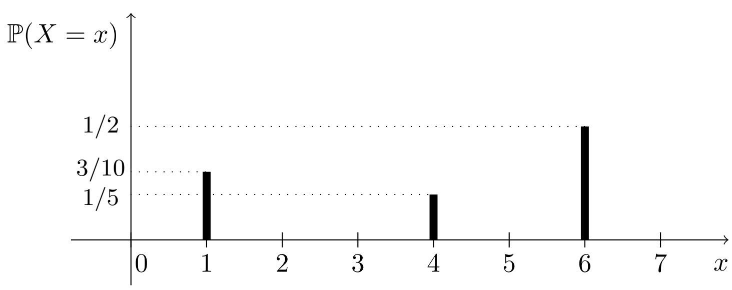
ou encore graphiquement par l'histogramme de la loi (voir plus loin).

Exemple. Une urne contient 3 boules portant le numéro 1, 2 boules portant le numéro 4 et 5 boules portant le numéro 6. On tire une boule dans l'urne au hasard ; on prend comme univers $\Omega = [\![1, 10]\!]$ (en supposant les boules identifiées à l'aide d'un autre numéro), muni de la probabilité uniforme. Soit X la V.A.R. qui associe à chaque boule tirée son numéro 1, 4 ou 6 ; $X(\Omega) : \{1, 4, 6\}$.

Le tableau de la loi de X est :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

L'histogramme de la loi de X est :



Propriété 2.
Soit X une variable aléatoire sur Ω. Posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; la famille d'événements

$$(X = x_1), (X = x_2), \ldots, (X = x_k), \ldots, (X = x_n)$$

est un système complet d'événements.
En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que les événements $(X = x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont 2 à 2 incompatibles et que leur réunion est Ω.
Soit $i \neq j$ et $\omega \in (X = x_i) \cap (X = x_j)$, c'est-à-dire $X(\omega) = x_i = x_j$. C'est impossible puisque $i \neq j \implies x_i \neq x_j$. Ainsi :

$$(X = x_i) \cap (X = x_j) = \varnothing$$

Les événements sont 2 à 2 incompatibles.
Montrons que $\bigcup_{k=1}^{n}(X = x_k) = \Omega$. Puisque $\forall k \in [\![1, n]\!], (X = x_k) \subset \Omega$, $\bigcup_{k=1}^{n}(X = x_k)$ est une partie de Ω :

$$\bigcup_{k=1}^{n}(X = x_k) \subset \Omega.$$

Montrons l'inclusion réciproque : $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n}(X = x_k)$. Soit $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donc $\exists k \in [\![1, n]\!]$, $X(\omega) = x_k$, donc $\omega \in (X = x_k)$ donc $\omega \in \bigcup_{k=1}^{n}(X = x_k)$. On a bien l'inclusion :

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n}(X = x_k).$$

Ainsi $(X = x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forment un S.C.E. ; en particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1.$$

■

Exemple.

$$\mathbb{P}((X = x_i) \text{ ou } (X = x_j)) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) + \mathbb{P}(X = x_j) & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\mathbb{P}((X = x_i) \text{ et } (X = x_j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Remarquer que dans la description des événements il est autorisé de substituer les connecteur "ou", "et", "non" en lieu et place des opérateurs ensemblistes $\cup$, $\cap$, $\complement$.

Propriété 3. *Soient $a \leqslant b$ deux réels. Avec les mêmes notations :*

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X < a)$$
$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$$
$$\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)$$
$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$$

Démonstration. Elles découlent (dans l'ordre) de :

$$(X \leqslant b) = (X < a) \cup (a \leqslant X \leqslant b) \underset{\text{incomp.}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(X \leqslant b) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$$

$$(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b) \underset{\text{incomp.}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant a) + \mathbb{P}(a < X \leqslant b)$$

$$(X < b) = (X < a) \cup (a \leqslant X < b) \underset{\text{incomp.}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(a \leqslant X < b)$$

$$(X < b) = (X \leqslant a) \cup (a < X < b) \underset{\text{incomp.}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leqslant a) + \mathbb{P}(a < X < b)$$

■

Remarque. La propriété 2 admet une réciproque. Considérons un ensemble fini de réels $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et n réels positifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dont la somme vaut 1. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une V.A.R. X sur cet espace vérifiant :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

En effet, prenons par exemple $\Omega = [\![1, n]\!]$; puisque les p_i sont positifs et $\sum p_i = 1$, il est possible de munir l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ d'une probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant $\mathbb{P}(i) = p_i$ (cf. Théorème 2, Chapitre "Espaces Probabilisés finis"). Définissons la V.A.R. X sur Ω par :

$$X : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Elle vérifie bien : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{i\}) = p_i$.

On résume ce résultat par :

Propriété 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une suite finie de réels et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite finie de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, alors il existe une V.A.R. X sur un espace probabilisé fini, tel que :

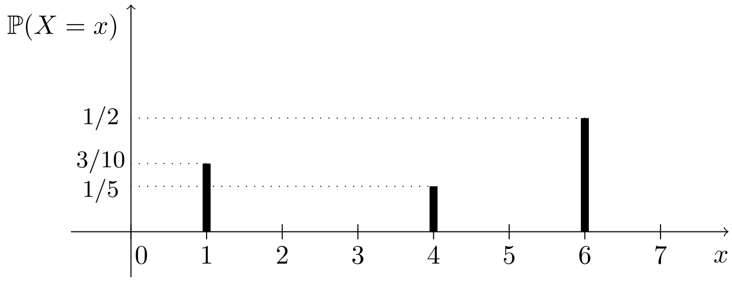
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

1.4. **Fonction de répartition.**

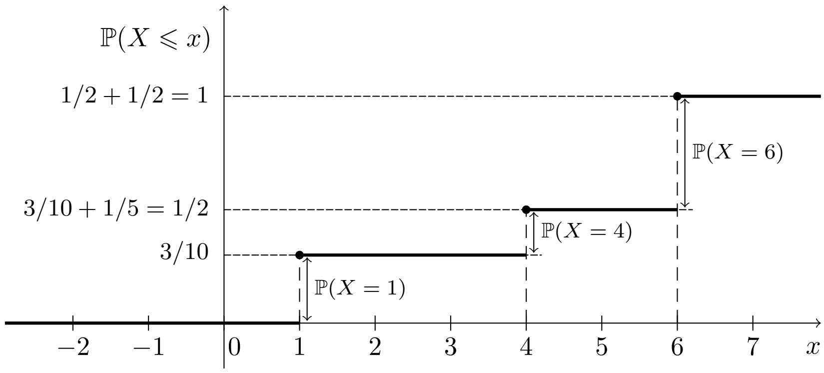
Définition 6. *Soit X un V.A.R. sur Ω. La fonction de répartition de X est l'application notée F_X :*

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}$$

Exemple. Reprenons l'histogramme de la loi de probabilité de X obtenu dans l'exemple ci-dessus :



La fonction de répartition de X a pour courbe représentative :



Propriété 5. *L'application F_X est croissante.*

Démonstration. Soient $a \leqslant b$ deux réels. L'événement $(X \leqslant a)$ implique l'événement $(X \leqslant b)$, donc $\mathbb{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant b)$, c'est-à-dire $F_X(a) \leqslant F_X(b)$. ■

Les deux propriétés suivantes sont fondamentales. Tout d'abord, de la loi de X on peut déduire la fonction de répartition :

Propriété 6. *En notant $x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_n$ les différentes valeurs prises par X :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < x_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) & \textit{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \textit{si } x \geqslant x_n \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $x < x_1$ l'événement $(X \leqslant x)$ est impossible, donc $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$.

Pour $x \in [x_k, x_{k+1}[$, l'événement $(X \leqslant x)$ est la réunion des événements $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_k)$, qui sont 2 à 2 incompatibles, donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k}(X = x_i)\right) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X = x_i)$$

Finalement, pour $x \geqslant x_n$, $(X \leqslant x) = \Omega$ donc $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. ■

Exercice 2. En reprenant l'exemple précédent de la V.A.R. X de loi :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

déterminer la fonction de répartition de X.

Résolution.

Réciproquement, de la fonction de répartition on peut déduire la loi de X :

Propriété 7.
Toujours en notant $x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_n$ les différentes valeurs prises par X :

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$$
$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

Démonstration. On a $F_X(x_1) = \mathbb{P}(X \leqslant x_1)$; or $(X \leqslant x_1) = (X < x_1) \cup (X = x_1) = (X = x_1)$ puisque $(X < x_1) = \varnothing$; donc $F_X(x_1) = \mathbb{P}(X = x_1)$.

Soit $k \in [\![2, n]\!]$: $(X \leqslant x_k) = (X = x_k) \cup (X < x_k) = (X = x_k) \cup (X \leqslant x_{k-1})$ car X ne prend aucune valeur dans $]x_{k-1}, x_k[$. De plus la réunion est disjointe donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant x_k) &= \mathbb{P}(X = x_k) + \mathbb{P}(X \leqslant x_{k-1}) \\ F_X(x_k) &= \mathbb{P}(X = x_k) + F_X(x_{k-1}) \\ \Longrightarrow \mathbb{P}(X = x_k) &= F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) \end{aligned}$$

■

Exemple. Toujours avec le même exemple $X(\Omega) = \{1, 4, 6\}$; à partir de la fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 3/10 & \text{si } 1 \leqslant x < 4 \\ 1/2 & \text{si } 4 \leqslant x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 6 \end{cases}$$

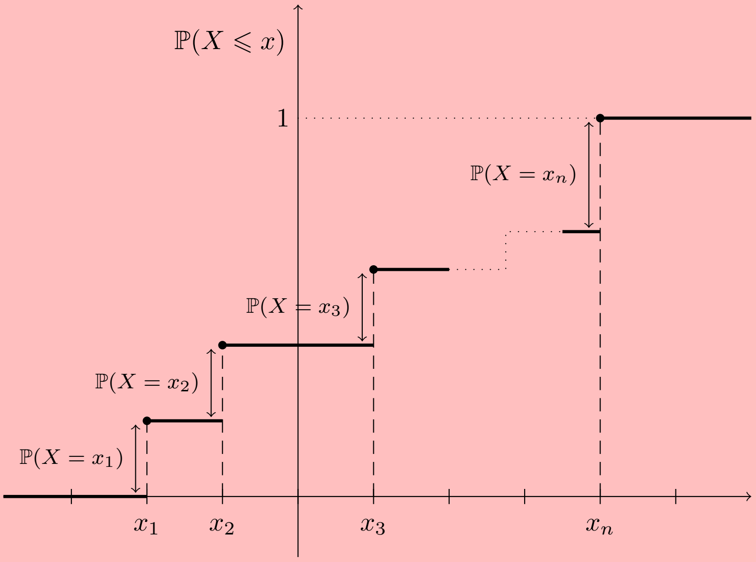
on déduit la loi de X :

$$\mathbb{P}(X = 1) = F_X(1) = \frac{3}{10}$$
$$\mathbb{P}(X = 4) = F_X(4) - F_X(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$
$$\mathbb{P}(X = 6) = F_X(6) - F_X(4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Graphiquement on a l'interprétation suivante de la fonction de répartition :

• Courbe représentative de la fonction de répartition

C'est une fonction en escalier. On retrouve la loi de X comme hauteur des marches aux abscisses dans l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.



De plus F_X a pour limites aux bornes :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1}$$

2. Espérance, moments, variance

2.1. Espérance mathématique.

2.1.1. *Définition.*

Définition 7.
Soit X une V.A.R. sur l'espace probabilisé fini $(X, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$ est le réel :

$$\boxed{E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)}.$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)}.$$

Remarques.
• La formule dans la définition s'appelle la formule de l'espérance.
• L'espérance mathématiques est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leur probabilité.
• Intuitivement l'espérance de X est la moyenne attendue des valeurs prises par X lorsqu'on renouvelle un très grand nombre de fois l'expérience. On utilisera cette interprétation pour estimer empiriquement l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide d'une simulation informatique de l'expérience répétée un très grand nombre de fois.

Exemple. En remplissant une grille de loto (cocher une combinaison de 6 numéros parmi 49), la probabilité de gagner, c'est à dire de cocher les 6 bons numéros est :

$$p = \mathbb{P}(\text{gagner}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{6! \times (49-6)!}{49!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} \approx 7,15 \times 10^{-8}$$

Un ticket coûte 2 €, et le gain pour 6 bons numéros et de 1 million d'€.

Soit la V.A.R. X qui à un ticket associe le gain en euros :

$$X(\text{gagnant}) = 10^6 \qquad ; \qquad X(\text{perdant}) = -2$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = 10^6 \times p + (-2) \times (1-p) \approx -1,93$$

C'est le gain moyen : en moyenne, en jouant au loto, on perdra 1,93€.

Remarque. Dans tous les jeux d'argent, l'espérance du gain est négative, autrement la loterie nationale perdrait de l'argent quasiment à coup sûr !

On dit que c'est un jeu non-équitable ; l'espérance de gain est non-nulle. Dans un jeu équitable l'espérance du gain est nulle : en moyenne les deux protagonistes remporteraient un gain nul.

Propriété 8.
Avec les mêmes notations :
• *Si X est constante égale à c alors $E(X) = c$.*
• *Si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.*

Démonstration. Si X est constante égale à c (*i.e.* $X(\Omega) = \{c\}$) :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) = c \times \mathbb{P}(X = c) = c \times P(\Omega) = c \times 1 = c$$

Si $X \geqslant 0$ (*i.e.* $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x}_{\geqslant 0} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

■

Propriété 9.

$$E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration. Par définition, puisque $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$:

$$E(\mathbb{1}_A) = \sum_{x \in \mathbb{1}_A(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = x) = 1 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) + 0 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

■

2.1.2. *Espérance d'une composée : théorème de transfert.*

Définition 8.
Soit X une V.A.R. sur l'espace probabilisé fini $(X; \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; alors on peut définir la V.A.R. composée : $\varphi \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Il est possible, mais pas facile, de déduire la loi de $\varphi \circ X$ à partir de la loi de X. Par contre, l'espérance de $\varphi \circ X$ se déduit aisément de la loi de X à partir de la formule de transfert :

Théorème 10. Théorème de transfert
Avec les mêmes notations :

$$E(\varphi \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$E(\varphi \circ X) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

Démonstration. Admise.

En corollaire, on obtient la propriété importante de linéarité de l'espérance :

Corollaire 11. Linéarité de l'espérance
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration. On applique la formule de transfert avec la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (ax+b) \times \mathbb{P}(X=x) \\ &= a \times \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X=x) + b \times \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) && \text{par linéarité de } \sum \\ &= a \times E(X) + b \times 1 && \text{d'après la propriété 2} \\ &= a \times E(X) + b && \blacksquare \end{aligned}$$

Plus généralement, la linéarité de l'espérance s'exprime sous la forme :

Propriété 12. Linéarité de l'espérance
Soient X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé fini et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Démonstration. Admis.

Corollaire 13. Croissance de l'espérance
Soient X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé fini. Alors :

$$X \leqslant Y \implies E(X) \leqslant E(Y).$$

Démonstration. Supposons que $X \leqslant Y$, c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors la V.A.R. $Y - X$ ne prend que des valeurs positives : $Y - X \geqslant 0$, et donc $E(Y - X) \geqslant 0$ (propriété 8). D'après la linéarité de l'espérance :

$$E(Y - X) = E(Y) - E(X) \geqslant 0 \implies E(X) \leqslant E(Y)$$

$\blacksquare$

2.1.3. *V.A.R. centrée.*

Définition 9.
Une V.A.R. X est dite centrée si son espérance $E(X)$ est nulle.

On peut naturellement associer à toute V.A.R. une variable centrée en lui soustrayant son espérance :

Proposition-Définition 10.
Si X est une V.A.R. alors $X - E(X)$ est une V.A.R. centrée. On l'appelle la variable aléatoire centrée associée à X.

Démonstration. l'application

$$X - E(X) : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) - E(X) \end{array}$$

est une V.A.R. ; d'après la linéarité de l'espérance :

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

$\blacksquare$

2.2. Moments d'une variable aléatoire.

2.2.1. *Définition.*

Définition 11.
Soit X une V.A.R. sur un espace probabilisé fini $(X, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre r de X, noté $m_r(X)$, le réel défini par :

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

$$m_r(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^r \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarques.
- $m_1(X) = E(X)$: le moment d'ordre 1 est l'espérance d e X.
- Grâce au théorème de transfert :

$$m_r(X) = E(X^r).$$

- On appelle moment centré d'ordre r de X, noté $\mu_r(X)$, le moment d'ordre r de la variable centrée associée à X :

$$\mu_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r \times \mathbb{P}(X = x).$$

2.3. Variance - Écart-type.

2.3.1. *Définitions.*

Définition 12.
- *La variance d'une V.A.R. X, notée $V(X)$, est son moment centré d'ordre 2 :*

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

C'est un réel positif.

- *L'écart-type de X, noté σ_X est la racine carrée de $V(X)$:*

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Remarque. Si X s'exprime dans un unité, alors $V(X)$ s'exprime dans le carré de cette unité ; c'est pourquoi on introduit l'écart-type qui s'exprime dans la même unité que X.

Exercice 3. Reprenons l'exemple de la loi :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Déterminer l'espérance de X et la variance de X.

Résolution.

Propriété 14.

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Démonstration. D'après la formule de transfert :

$$E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x) = V(X)$$

■

Propriété 15.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$V(aX + b) = a^2 \times V(X).$$

Démonstration. D'après la propriété 14 :

$$\begin{aligned}
V(aX + b) &= E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) \\
&= E\left((aX + b - aE(X) - b)^2\right) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \\
&= a^2 \times E\left((X - E(X))^2\right) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= a^2 \times V(X)
\end{aligned}$$

■

Remarque. Variance et écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de son espérance $E(X)$: intuitivement, avec la formule $V(X) = E((x - E(X))^2)$, la variance est la moyenne des carrés des écarts des valeurs prises par X autour de son espérance. On a aussi le résultat suivant :

Propriété 16.
Une V.A.R. X a une variance nulle si et seulement si elle prend presque surement une valeur constante (égale à $E(X)$). Autrement dit :

$$V(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = E(X)) = 1.$$

Démonstration. Puisque les événement $(X = E(X))$ et $(X \neq E(X))$ sont contraires, $\mathbb{P}(X = E(X)) = 1 - \mathbb{P}(X \neq E(X))$. Il suffit donc de montrer que :

$$V(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X \neq E(X)) = 0.$$

Par définition :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{(x - E(X))^2}_{\geqslant 0} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geqslant 0}.$$

Ainsi, puisque tous les termes de la somme sont positifs :

$$V(X) = 0 \iff \forall x \in X(\Omega), \begin{cases} x = E(X) \\ \quad \text{ou} \\ \mathbb{P}(X = x) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $V(X) = 0$:

$$\mathbb{P}(X \neq E(X)) = \sum_{x \neq E(X)} \mathbb{P}(X = x) \underset{(*)}{=} \sum_{x \neq E(X)} 0 = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\mathbb{P}(X \neq E(X)) = 0$:

$$\sum_{x \neq E(X)} \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Puisqu'il s'agit d'une somme de termes tous positifs, ils sont nécessairement tous nuls : pour tout $x \in X(\Omega)$, $x \neq E(X) \implies \mathbb{P}(X = x) = 0$; autrement dit : $x = E(X)$ ou $P(X = x) = 0$. Ainsi d'après $(*)$, $V(X) = 0$. ∎

Remarque. Une V.A.R. est dite réduite lorsque sa variance est égale à 1.
Soit X une V.A.R. de variance non-nulle et $\sigma_X \neq 0$ son écart-type. Alors :

$$V\left(\frac{1}{\sigma_X} X\right) = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 V(X) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

La variable $\dfrac{1}{\sigma_X} X$ est donc réduite : on l'appelle la variable réduite associée à X.

La variable centrée $X - E(X)$ a mêmes variance et écart-type que X.

Si X est de variance non-nulle, la <u>variable centrée réduite associée à X</u> est :

$$\frac{1}{\sigma_X}(X - E(X)).$$

Elle a une espérance nulle, et une variance égale à 1.

2.3.2. *Formule de Koenig-Huygens.* La variance peut se calculer à l'aide de la formule de Koenig-Huygens :

"La variance de X est l'espérance du carré moins le carré de l'espérance".

Propriété 17. Formule de Koenig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. D'après la propriété 14 :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\big((X - E(X))^2\big) \\ &= E\big(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2\big) \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

■

Exercice 4. Reprenons l'exemple de la loi :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Déterminer la loi de X^2 puis $V(X)$ à l'aide de la formule de Koenig-Huygens.

Résolution.

3. Variables aléatoires indépendantes

3.1. Variables aléatoires indépendantes.

Définition 13.
Soient X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et notons : $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_s\}$.

Les V.A.R. X et Y sur Ω sont dites indépendantes si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!],\ \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$$

c'est à dire si pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Exemple. On lance deux fois un dé 6 ; X est le résultat du premier lancer, Y le résultat du second. Les deux lancers étant indépendants, les variables X et Y le sont aussi.

Propriété 18.
Si X et Y sont deux V.A.R. indépendantes et si f et g sont des fonctions réelles définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors les deux V.A.R. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration. Admis.

Remarque. Propriété très utile !

Propriété 19. *Pour deux V.A.R. X et Y indépendantes :*

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y) \quad ; \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Démonstration.
Montrons d'abord que si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
Posons :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_s\}.$$

Alors la V.A.R. XY a pour univers image :

$$XY(\Omega) = \Big\{x_i \times y_j \mid i \in [\![1,r]\!],\ j \in [\![\{,1]\!], s\}\Big\}$$

ainsi :

$$\forall x \in XY(\Omega),\ (XY = x) = \bigcup_{x_i \times y_j = x} (X = x_i) \cap (Y = y_j)$$

et c'est une réunion d'évènement deux à deux incompatibles ; on a donc :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in XY(\Omega)} x \times \mathbb{P}(XY = x) \\ &= \sum_{x \in XY(\Omega)} \sum_{x_i \times y_j = x} x_i \times y_j \times \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant s}} x_i \times y_j \times \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \end{aligned}$$

Par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}} x_i \times y_j \times \mathbb{P}(X=x_i)\times\mathbb{P}(Y=y_j)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{1\leqslant j\leqslant s} x_i \times y_j \times \mathbb{P}(X=x_i)\times\mathbb{P}(Y=y_j)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left(x_i\times\mathbb{P}(X=x_i)\times\sum_{1\leqslant j\leqslant s} y_j\times\mathbb{P}(Y=y_j)\right)\\
&= \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant r} x_i\times\mathbb{P}(X=x_i)\right)\times\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant s} y_j\times\mathbb{P}(Y=y_j)\right)\\
&= E(X)\times E(Y)
\end{aligned}$$

Appliquons-le maintenant pour calculer la variance de la somme, avec Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y)^2)-E(X+Y)^2 && \text{Koenig-Huygens}\\
&= E(X^2+Y^2+2XY)-E(X+Y)^2\\
&= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)\\
&\quad -(E(X)^2+E(Y)^2+2E(X)E(Y))^2 && \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2\\
&\quad +2(\underbrace{E(XY)-E(X)E(Y)}_{=0}) && \text{par indépendance}\\
&= V(X)+V(Y) && \text{par Koenig-Huygens}
\end{aligned}$$

■

3.2. **Variables mutuellement indépendantes.**

La notion d'indépendance se généralise à plus de deux V.A.R. :

Définition 14.
Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$; n variables aléatoires sur Ω, $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=x_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i=x_i)$$

Remarques. C'est le cas notamment lorsque $X_1,X_2,\dots,X_n$ décrivent les résultats de n épreuves $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\dots\mathscr{E}_n$ indépendantes.
Comme dans l'exemple de 3 lancers d'une pièce équilibrée ; les lancers sont indépendants.

Propriété 20.
Soient $X_1,X_2,\dots,X_n$ des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes.
- *Toutes sous-familles de V.A.R. sont aussi mutuellement indépendantes.*
- *Si pour tout $i=1,\dots,n$, f_i est une fonction réelle définie sur $X_i(\Omega)$, alors $f_1(X_1),f_2(X_2),\dots,f_n(X_n)$ sont des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes.*

• (Lemme des coalitions) Si f et g sont des fonctions réelles définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega)$ et $X_{p+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, alors $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont deux V.A.R. sur Ω indépendantes.

Démonstration. Admis.

Remarque. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors elles sont aussi 2 à 2 indépendantes (appliquer le premier point à tout sous-famille de 2 V.A.R.).

4. Lois usuelles

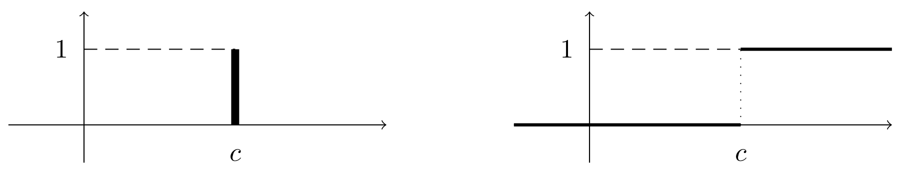
Il faut connaître les lois usuelles et apprendre à reconnaître les situations où elles s'appliquent.

4.1. **Loi certaine.**

4.1.1. *Définition.*

Définition 15. Loi certaine
Une *<u>V.A.R. certaine</u> est une V.A.R. constante ; autrement dit :*
$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = c$$
ou encore :
$$\text{L'univers image est un singleton : } X(\Omega) = \{c\}.$$
On dit aussi que X suit une loi certaine.
L'événement $(X = c)$ est l'événement certain donc $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

4.1.2. *Histogramme et fonction de répartition d'une loi certaine.*



4.1.3. *Situation type.*

Lorsque l'issue est certaine : une seule issue.

4.1.4. *Espérance et variance.*

$$\boxed{E(X) = c} \quad ; \quad \boxed{V(X) = 0}$$

4.2. **Loi uniforme.**

4.2.1. *Définition.*

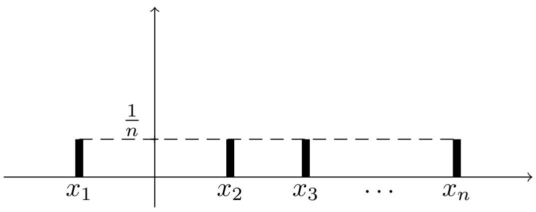
Définition 16. Loi uniforme
Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$ de cardinal n.
Une V.A.R. X <u>suit la loi uniforme sur E</u> si :
- $X(\Omega) = E$,
- $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.

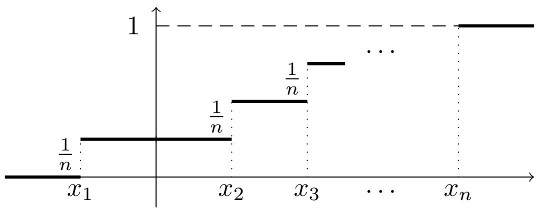
Dans ce cas on écrit : $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$.
Lorsque $E = [\![1, n]\!]$ on note plus simplement $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$.

4.2.2. *Situation type.*

On choisit au hasard (de manière équiprobable) un objet parmi n. Par exemple : on lance une pièce équilibré ; on lance un dé 6 non pipé ; on tire au hasard une boule dans une urne...

4.2.3. *Histogramme et fonction de répartition.*





4.2.4. *Espérance de la loi uniforme.*

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$. L'espérance de X est la moyenne de $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

Exercice 5. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$.

(1) Calculer $E(X)$.

(2) Calculer $V(X)$.

Résolution.

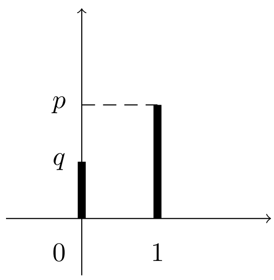
4.3. **Loi de Bernoulli.**

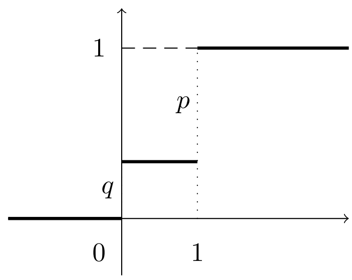
4.3.1. *Définition.*

Définition 17. Loi de Bernoulli
Une V.A.R. X est dite de Bernoulli lorsqu'elle ne prend que deux valeurs 0 et 1, et avec des probabilités non nulles.
On note habituellement $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et $q = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
Ainsi X suit une loi de Bernoulli si :
- $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
- $\mathbb{P}(X = 1) = p \in]0, 1[$
- $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$; $p \in]0, 1[$ est la paramètre de la loi de Bernoulli.

4.3.2. *Histogramme et fonction de répartition.*





4.3.3. *Situation type.*

C'est la situation d'un choix binaire, vrai/faux, codifié par 1/0.

• On lance une pièce équilibrée ; X vaut 1 si l'on obtient face et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, mais aussi $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$.

• Si la pièce n'est pas équilibrée, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ où p est la probabilité d'obtenir face.

• Une urne contient $b > 0$ boules blanches et $n > 0$ boules noires. On tire une boule dans l'urne ; soit X le nombre de boules blanches obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{b+n}\right)$.

• Soit A un événement d'un espace probabilisé avec $p = \mathbb{P}(A) \in]0,1[$. L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A dans Ω :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Réciproquement, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, en posant $A = (X = 1)$, X est l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A dans Ω.

Une variable de Bernoulli X, est l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'évènement $A = (X = 1)$.

4.3.4. *Espérance et variance.*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$; alors $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$. Ainsi :

$$E(X) = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$$

Pour le calcul de la variance on utilise la définition (moment centré d'ordre 2) :

$$V(X) = (1-p)^2 \times \mathbb{P}(X=1) + (0-p)^2 \times \mathbb{P}(X=0) = q^2 \times p + p^2 \times q = pq\underbrace{(p+q)}_{=1} = pq.$$

En résumé :

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $q = 1-p$;

$$\boxed{E(X) = p} \quad ; \quad \boxed{V(X) = pq}.$$

4.4. **Loi binomiale.**

4.4.1. *Situation type : schéma de Bernoulli.*

On considère une expérience qui conduit à deux issues possibles : le succès S avec probabilité $p \in]0,1[$, et l'échec E avec probabilité $q = 1-p \in]0,1[$.

On répète cette expérience n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de manière indépendante ; soit X le nombre de succès obtenus.

Un tel contexte s'appelle un schéma de Bernoulli : répéter n fois et de manière indépendante une expérience menant à deux issues possibles succès/échec ; compter le nombre de succès.

• Espace probabilisé.

On prend comme univers $\Omega = \{S,E\}^n$, l'ensemble des n-listes de $\{S,E\}$. Chaque issue est une n-liste de $\{S,E\}^n$; si elle comporte exactement $k \in [\![0,n]\!]$ succès, par indépendance des épreuves, sa probabilité est $p^k q^{n-k}$.

• Déterminons la loi de X.

X peut prendre toute valeur entière entre 0 (aucun succès) et n (que des succès). L'univers image est donc $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$; calculons $\mathbb{P}(X = k)$:
L'événement $(X = k)$ se partitione en tous les événement élémentaires ayant exactement k succès ; chacun de ces événements élémentaires a pour probabilité $p^k q^{n-k}$. Or il y en a exactement $\binom{n}{k}$; en effet une issue comportant exactement k succès est déterminée par les rangs d'apparition des succès (aux 1ère, 2ème, …, ou n-ième épreuves). Il y en a donc autant que de k-combinaisons dans $[\![1, n]\!]$. Ainsi :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Cela détermine la loi de X.

Exemple. On lance 10 fois un dé 6 non-pipé ; soit X le nombre de 6 obtenus. Alors :

$$X(\Omega) = [\![0, 10]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, 10]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \times \frac{5^{10-k}}{6^{10}}$$

Par exemple la probabilité de n'obtenir que des 6 est :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{10}{10} \times \frac{5^0}{6^{10}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

4.4.2. *Définition.*

Définition 18. *On dit qu'une V.A.R. suit la <u>loi binomiale de paramètres n et p</u> si :*

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
- $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

avec $q = 1 - p$.
On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque. Avec la formule du binôme, on retrouve bien que :

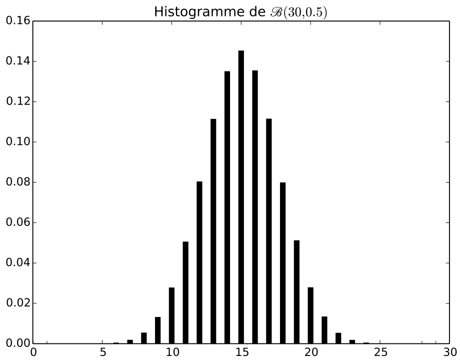
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

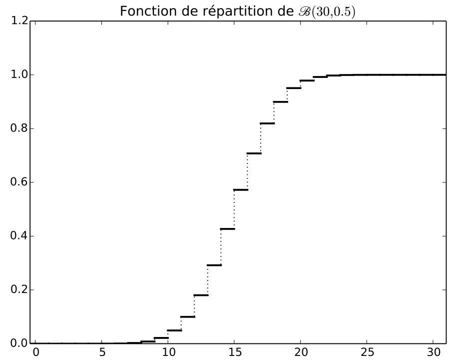
4.4.3. *Histogramme et fonction de répartition.*

L'histogramme d'une loi binomiale s'appuie sur une courbe en cloche, centrée lorsque $p = \frac{1}{2}$, et décalé vers la gauche (respectivement vers la droite) lorsque $p < \frac{1}{2}$ (respectivement $p > \frac{1}{2}$.

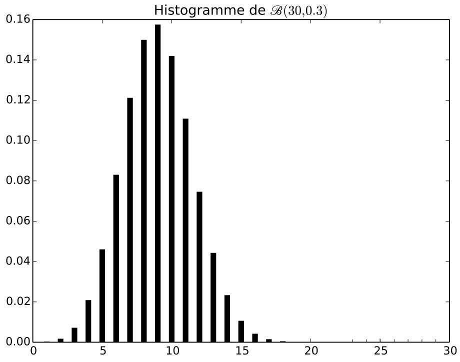
Par exemple, pour $n = 30$:

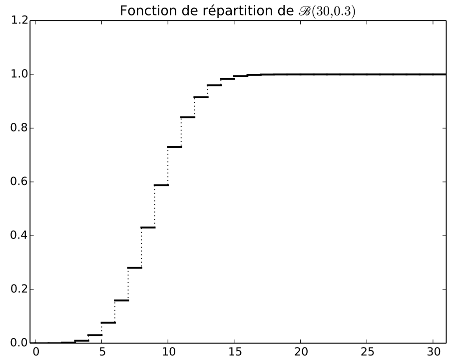
- Pour $p = \frac{1}{2}$:



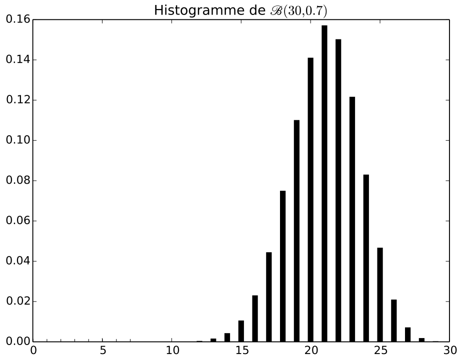


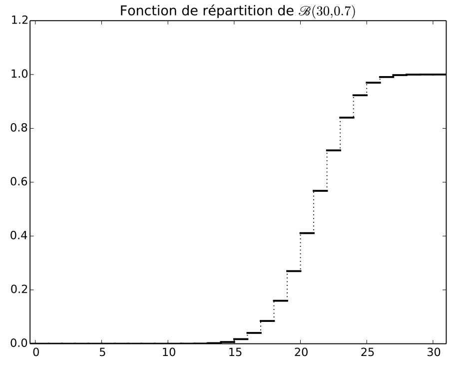
- Pour $p < \frac{1}{2}$:





- Pour $p > \frac{1}{2}$:





4.4.4. *Espérance et variance.*

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$; on pose $q = 1 - p$.

L'espérance de $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ est :

$$\boxed{E(X) = n \times p}.$$

Démonstration. Puisque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, d'après la formule de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k\binom{n}{k}}_{=} p^k q^{n-k} && \text{décrochage pour } k=0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overbrace{n\binom{n-1}{k-1}} p^k q^{n-k} && \text{formule du pion} \\
&= n \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} && \text{Linéarité de } \sum \\
&= n \times \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-1-j} && j \leftarrow k-1 \\
&= n \times p \times \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j} q^{n-1-j} && p^{j+1} = p \times p^j \\
&= n \times p \times (p+q)^{n-1} && \text{formule du binôme} \\
&= n \times p && p+q=1
\end{aligned}$$

■

La variance de $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ est :

$$\boxed{V(X) = n \times p \times q}.$$

Démonstration. Calculons d'abord l'espérance de $E(X(X-1))$ de deux façons (astuce de calcul).

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} && \text{formule de transfert}\\
&= 0+0+\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} && \text{décrochages pour } k=0,1\\
&= \sum_{k=2}^{n} n(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k} && \text{formule du pion}\\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} && \text{re-formule du pion}\\
&= n\times(n-1)\times\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} && \text{linéarité de } \sum\\
&= n\times(n-1)\times\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j+2} q^{n-2-j} && j\leftarrow k-2\\
&= n\times(n-1)\times p^2\times\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j} q^{n-2-j} && p^{j+2}=p^2\times p^j\\
&= n\times(n-1)\times p^2\times(p+q)^{n-2} && \text{formule du binôme}\\
&= n\times(n-1)\times p^2 && p+q=1
\end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
&E(X(X-1)) = E(X^2)-E(X) && \text{linéarité de l'espérance}\\
&\implies E(X^2) = E(X(X-1))+E(X)
\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2)-E(X)^2\\
&= \underbrace{E(X(X-1))}_{=} + E(X)-E(X)^2\\
&= n\times(n-1)\times p^2+n\times p-n^2\times p^2 && \text{car } E(X)=n\times p\\
&= n^2\times p^2-n\times p^2+n\times p-n^2\times p^2\\
&= n\times(p-p^2)\\
&= n\times p\times(1-p)\\
&= n\times p\times q
\end{aligned}$$

■

4.4.5. *Loi de la somme de V.A.R. indépendantes de même loi de Bernoulli.*

Considérons $X_1, X_2, \dots, X_n$ des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes et suivant toutes une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Déterminons la loi de leur somme $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Puisque $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k(\Omega) = \{0,1\}$, $Y(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}(Y=k) &= \text{"exactement } k \text{ des } X_i \text{ valent 1, } n-k \text{ valent 0"}\\ &= \bigcup_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\bigcap_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}}(X_i=1)\cap\bigcap_{i\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}(X_i=0)\right)\end{aligned}$$

C'est une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}}(X_i=1)\cap\bigcap_{i\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}(X_i=0)\right)$$

par indépendance mutuelle

$$\begin{aligned}&= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}}\mathbb{P}(X_i=1)\times\prod_{i\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}\mathbb{P}(X_i=0)\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} p^k q^{n-k}\\ &= \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

puisqu'il y a exactement $\binom{n}{k}$ k-combinaisons $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ dans $[\![1,n]\!]$. Ainsi Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Le résultat est à connaître :

Propriété 21.
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes et suivant toutes une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Alors leur somme $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.