

COLLES - BCPST1

SEMAINE 10/30 : DU 6 AU 10 DÉCEMBRE

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les trois suivantes :

- Somme télescopique : $\sum_{k=p}^n u_k - u_{k+1}$.
- Formule du binôme : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- Factorisation : $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$.

Les exercices porteront sur le calcul de sommes et les suites usuelles.

Pour les suites usuelles, les seuls exercices porteront sur l'obtention pour des suites arithmético-géométriques ou récurrentes linéaires d'ordre 2 de l'expression du terme de rang n , u_n en fonction de n .

Sommes, produits, identités remarquables

- Notation \sum . Formules de $\sum_{k=1}^n 1$, $\sum_{k=p}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$, $\sum_{k=p}^n q^k$.
- Propriétés : linéarité, décrochage, changement d'indice, sommes télescopiques.
- Sommes doubles de la forme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j}$,
 $\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j}$; décomposition par ligne, par colonne.
- Notation \prod . Formules de $\prod_{k=1}^n a$, $\prod_{k=1}^n k$, $\prod_{k=1}^n a^k$, $\prod_{k=1}^n a^{u_k}$. Propriétés. Produits télescopiques.
- Définition de $n!$.
- Coefficients binomiaux. Définition. Valeurs remarquables $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$.
- Propriété de symétrie, relation de Pascal; triangle de Pascal.

- Formule du binôme de Newton.
- Factorisation de $a^n - b^n$.

Suites réelles usuelles

- Suites arithmétiques. (Définition, expression de u_n en fonction de n , limite, somme de termes consécutifs).
- Suites géométriques. (Définition, expression de u_n en fonction de n , limite éventuelle, somme de termes consécutifs).
- Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (Définition, expression de u_n en fonction de n).
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. (Définition, expression de u_n en fonction de n).