

COLLES - BCPST1

SEMAINE 14/30 : DU 17 AU 21 JANVIER

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les trois suivantes :

- Associativité du produit matriciel.
- Distributivité de $\times$ sur $+$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), I_p \times A = A$ et $\forall A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), A \times I_p = A$

Les exercices porteront sur les trois chapitres "équations différentielles linéaires", "systèmes linéaires" et "matrices" (début).

Attention : les matrices n'ont pas encore été traitées en TD : seulement de l'application directe.

Équations différentielles linéaires du 1er et 2nd ordre

- Équations différentielles du premier ordre à coefficient et second membre constants : $y' + ay = b$.
- Équations différentielles du second ordre à coefficient et second membre constant : $y'' + ay' + by = c$.
- Équations différentielles du premier ordre à coefficient et second membre non constants : $y' + a(x)y = b(x)$. Méthode de variation de la constante.
- Équations différentielles du second ordre à coefficient constant et second membre non constant : $y'' + ay' + by = c(x)$. Recherche d'une solution particulière : on proposera à l'élève de chercher une solution sous l'une des formes suivantes selon si le second membre $c(x)$ est de l'une des formes suivantes :
 - $P(x)$ fonction polynomiale : $y_p(x) = x^m Q(x)$ avec $Q(x)$ fonction polynomiale de même degré que $P(x)$ et $m = 0, 1, 2$ est l'ordre de multiplicité de 0 dans l'équation caractéristique (EC).
 - plus généralement $P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x)$ fonction polynomiale : $y_p(x) = x^m Q(x)e^{\alpha x}$ avec $Q(x)$ fonction polynomiale de même degré que $P(x)$ et $m = 0, 1, 2$ est l'ordre de multiplicité de α dans (EC).
 - $c \cos(\alpha x)$ ou $c \sin(\alpha x)$: $y_p(x) = a \cos(\alpha x) + b \sin(\alpha x)$ ou $y_p(x) = ax \cos(\alpha x) + bx \sin(\alpha x)$ selon que $i \times \alpha$ est ou non solution de (EC).

- Principe de superposition des solutions.

Systèmes linéaires

- Systèmes équivalents, opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ ($j \neq i$).
- Résolution par la méthode du pivot de Gauss.
- Système échelonné, pivots. Rang d'un système (= nombre de pivots = nombre d'équations principales, dans n'importe quel système triangulaire/trapézoïdal/échelonné équivalent).
- Un système admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

Les matrices

- Matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; Notation $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- Somme de 2 matrices, multiplication par un scalaire. Propriétés.
- Produit de 2 matrices. Propriétés.
- Matrices carrées d'ordre p ; Notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Matrice identité. Propriété.
- Puissances entières; propriétés. Formule du binôme pour deux matrices qui commutent.
- Inverse; propriétés;
- Transposition; propriétés.
- Matrices remarquables : scalaires, diagonales, triangulaires, symétriques.
- Écriture matricielle d'un système linéaire. Résolution par opération élémentaires sur les matrices. Interprétation.
- Méthodes d'inversion d'une matrice (par résolution d'un système, ou matriciellement (méthode miroir)).

Remarques :

- Nous avons admis qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche.
- le cours sur les matrices n'est pas fini (seuls manquent les formules de Cramer et la notion de rang); une méthode générale d'inversion de matrice a été vue et pourra constituer un bon exercice.
- Les matrices n'ont pas encore été traitées en TD.