

COLLES - BCPST1

SEMAINE 17/30 : DU 7 AU 11 FÉVRIER

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les quatre suivantes :

- Soient $f : E \longrightarrow F$ et A, B deux parties de E ; alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- Une composée d'applications injectives est injective.
- Une composée d'applications surjectives est surjective.
- Composée de bijections. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Les exercices porteront sur les chapitres "matrices" et "applications".

Les matrices

- Matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; Notation $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- Somme de 2 matrices, multiplication par un scalaire. Propriétés.
- Produit de 2 matrices. Propriétés.
- Matrices carrées d'ordre p ; Notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Matrice identité. Propriété.
- Puissances entières ; propriétés. Formule du binôme pour deux matrices qui commutent.
- Inverse ; propriétés ;
- Transposition ; propriétés.
- Matrices remarquables : scalaires, diagonales, triangulaires, symétriques.
- Écriture matricielle d'un système linéaire. Résolution par opération élémentaires sur les matrices. Interprétation.
- Méthodes d'inversion d'une matrice (par résolution d'un système, ou matriciellement (méthode miroir)).
- Pour les matrices 2×2 : déterminant $(ad - bc)$. Critère d'inversibilité et inverse.
- Formules de Cramer pour un système de Cramer de 2 équations à 2 inconnues.
- Rang d'une matrice. Propriétés.

Remarques :

- Nous avons admis qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche.

Les applications

- Application de E vers F ; image, antécédent ; image directe $f(E)$, image d'une partie $A \subset E$; $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- Application identité. Indicatrice de $A \subset E$.
- Restriction d'une application. Prolongement d'une application.
- Composée d'applications.
- Applications injectives, propriétés
- Applications surjectives, propriétés.
- Applications bijectives. Application réciproque. Caractérisations, propriétés. Réciproque d'une composée de bijections.
- Cas particulier des applications réelles. Interprétation graphique de ces notions.

Remarque. Le TD sur les applications n'a pas encore été intégralement traité.

Exercices types : Déterminer si une application est injective, surjective, bijective ; pour une bijection déterminer son application réciproque.