COLLES - BCPST1

SEMAINE 18/30 : DU 14 AU 18 FÉVRIER

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les trois suivantes :

- Composée de bijections. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$; si $P = O_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $a_k = 0$.
- Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P avec ordre de multiplicité $m > 1$ ssi $P(\alpha) = 0$ et α est racine du polynôme dérivé P' avec ordre de multiplicité $m - 1$.

Les exercices porteront sur les chapitres "applications" et "polynômes".

Les applications

- Application de E vers F ; image, antécédent ; image directe $f(E)$, image d'une partie $A \subset E$; $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- Application identité. Indicatrice de $A \subset E$.
- Restriction d'une application. Prolongement d'une application.
- Composée d'applications.
- Applications injectives, propriétés
- Applications surjectives, propriétés.
- Applications bijectives. Application réciproque. Caractérisations, propriétés. Réciproque d'une composée de bijections.
- Cas particulier des applications réelles. Interprétation graphique de ces notions.

Remarque. Le TD sur les applications n'a pas encore été intégralement traité.
Exercices types : Déterminer si une application est injective, surjective, bijective ; pour une bijection déterminer son application réciproque.

Les polynômes

- Polynômes (ou fonctions polynômes) à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Notations $X^k : x \longmapsto x^k$; $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
  Un polynôme est caractérisé par son degré et ses coefficients.
- Opérations : multiplication par un scalaire, somme, produit, dérivation.
  Effet sur le degré et les coefficients.
- Racine d'un polynôme ; $a \in \mathbb{K}$ est racine de P ssi $(X - a)$ factorise P. Généralisation à plusieurs racines distinctes. Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
- Ordre de multiplicité d'une racine ; $a \in \mathbb{K}$ est racine de P d'ordre de multiplicité m ssi $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

- Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P avec ordre de multiplicité $m > 1$ ssi $P(\alpha) = 0$ et α est racine de P' avec ordre de multiplicité $m - 1$.
  Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine multiple de P ssi $P(a) = P'(a) = 0$.

Remarque. Le TD sur les polynômes n'a pas encore été intégralement traité.