COLLES - BCPST1

SEMAINE 19/30 : DU 07 AU 11 MARS

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les trois suivantes :

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$; si $P = O_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $a_k = 0$.
- Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P avec ordre de multiplicité $m > 1$ ssi $P(\alpha) = 0$ et α est racine du polynôme dérivé P' avec ordre de multiplicité $m - 1$.
- Unicité de la limite d'une suite convergente : si $\lim u_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim u_n = \ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

Les exercices porteront sur les chapitres "polynômes" et "suites réelles" (début seulement).

Les polynômes

- Polynômes (ou fonctions polynômes) à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Notations $X^k : x \longmapsto x^k$; $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
  Un polynôme est caractérisé par son degré et ses coefficients.
- Opérations : multiplication par un scalaire, somme, produit, dérivation.
  Effet sur le degré et les coefficients.
- Racine d'un polynôme ; $a \in \mathbb{K}$ est racine de P ssi $(X - a)$ factorise P. Généralisation à plusieurs racines distinctes. Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
- Ordre de multiplicité d'une racine ; $a \in \mathbb{K}$ est racine de P d'ordre de multiplicité m ssi $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

- Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P avec ordre de multiplicité $m > 1$ ssi $P(\alpha) = 0$ et α est racine de P' avec ordre de multiplicité $m - 1$.
  Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine multiple de P ssi $P(a) = P'(a) = 0$.

Remarque. Le TD sur les polynômes a été intégralement traité.

Les suites réelles

- Définition de la limite d'une suite réelle (finie ou infinie, par valeur supérieure/inférieure). Unicité de la limite. Suite convergente, divergente.
- Propriétés :
  Limite finie et valeur absolue : $\lim u_n = \ell \iff \lim |u_n - \ell| = 0$, $\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$.
  Limite et signe à partir d'un certain rang.
  Toute suite convergente est bornée.
  $\lim u_n = 0$ et (v_n) bornée $\implies \lim u_n v_n = 0$.
  Caractérisation à l'aide des suites extraites de rang pair et impair.
- Limites de références.
- Opérations et limites ; limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
  Théorème de composition des limites.
  Théorèmes des gendarmes.
  Croissance comparée ($n!$, a^n, n^α).

Remarque. En exercice uniquement : déterminer nature et limite éventuelle d'une suite : par le calcul, par encadrement ou à l'aide des suites extraites de rangs pairs/impairs.