COLLES - BCPST1

SEMAINE 20/30 : DU 14 AU 18 MARS

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les trois suivantes :

- Unicité de la limite d'une suite convergente : si $\lim u_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim u_n = \ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $\ell_1 = \ell_2$.
- Théorème des gendarmes : si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.
- Théorème de la limite monotone : Toute suite croissante et majorée, est convergente.
- Théorème fondamental des suites adjacentes : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Les exercices porteront sur le chapitre "suites réelles".

Les suites réelles

- Définition de la limite d'une suite réelle (finie ou infinie, par valeur supérieure/inférieure). Unicité de la limite. Suite convergente, divergente.
- Propriétés :
  Limite finie et valeur absolue : $\lim u_n = \ell \iff \lim |u_n - \ell| = 0$, $\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$.
  Limite et signe à partir d'un certain rang.
  Toute suite convergente est bornée.
  $\lim u_n = 0$ et (v_n) bornée $\implies \lim u_n v_n = 0$.
  Caractérisation à l'aide des suites extraites de rang pair et impair.
- Limites de références.
- Opérations et limites ; limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
  Théorème de composition des limites.
  Théorèmes des gendarmes.
  Croissance comparée ($n!$, a^n, n^α).

- Monotonie.
  Théorème de la limite monotone.
  Suites adjacentes.
- Suites équivalentes (pour des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang !).
  Propriété fondamentale (deux suites équivalentes ont même nature et même limite).
- Opérations sur les équivalents (symétrie, transitivité, multiplication par un scalaire non nul, produit, puissance, valeur absolue, inverse, quotient).
- Équivalent d'un suite polynomiale, d'une fraction rationnelle, d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^*$.
- Équivalent usuels : lorsque $u_n \to 0$:
  $\sin u_n$, $\tan u_n$, $1 - \cos u_n$, $\ln(1 + u_n)$, $e^{u_n} - 1$, $\sqrt{1 + u_n} - 1$, $(1 + u_n)^a - 1$