COLLES - BCPST1

SEMAINE 21/30 : DU 21 AU 25 MARS

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les quatre suivantes :

- Théorème des gendarmes : si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.
- Théorème de la limite monotone : Toute suite croissante et majorée, est convergente.
- Théorème fondamental des suites adjacentes : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
- Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et un entier p tel que $0 \leq p \leq n$. Il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de p éléments de E.

Les exercices porteront sur les chapitre "suites réelles" et "dénombrements".

Les suites réelles

- Définition de la limite d'une suite réelle (finie ou infinie, par valeur supérieure/inférieure). Unicité de la limite. Suite convergente, divergente.
- Propriétés :
  Limite finie et valeur absolue : $\lim u_n = \ell \iff \lim |u_n - \ell| = 0$, $\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$.
  Limite et signe à partir d'un certain rang.
  Toute suite convergente est bornée.
  $\lim u_n = 0$ et (v_n) bornée $\implies \lim u_n v_n = 0$.
  Caractérisation à l'aide des suites extraites de rang pair et impair.
- Limites de références.
- Opérations et limites ; limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
  Théorème de composition des limites.
  Théorèmes des gendarmes.
  Croissance comparée ($n!$, a^n, n^α).
- Monotonie.
  Théorème de la limite monotone.
  Suites adjacentes.

– Suites équivalentes (pour des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang !).
Propriété fondamentale (deux suites équivalentes ont même nature et même limite).
– Opérations sur les équivalents (symétrie, transitivité, multiplication par un scalaire non nul, produit, puissance, valeur absolue, inverse, quotient).
– Équivalent d'un suite polynomiale, d'une fraction rationnelle, d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^*$.
– Équivalent usuels : lorsque $u_n \to 0$:
$\sin u_n$, $\tan u_n$, $1 - \cos u_n$, $\ln(1 + u_n)$, $e^{u_n} - 1$, $\sqrt{1 + u_n} - 1$, $(1 + u_n)^a - 1$

Remarque : Le TD sur les suites a été achevé. Les élèves peuvent résoudre les exercices de manière autonome.

Dénombrements

– Cardinal d'un ensemble fini. Théorème fondamental : deux ensembles finis E et F ont même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E vers F.
– $A \subset E \implies card(A) \leqslant card(E)$ avec égalité ssi $A = E$.
– Comparaison des cardinaux de E et F lorsqu'il existe une injection, une surjection, de E vers F.
Si $card(E) = card(F)$, alors $f : E \to F$ est injective ssi surjective ssi bijective.
– Cardinal d'une réunion de deux ensembles disjoints. Cardinal d'une réunion d'une famille finie d'ensembles 2 à 2 disjoints. Cardinal d'une réunion de deux ensembles.
– Cardinal d'un produit cartésien. Nombre d'applications entre 2 ensembles finis. Nombre de p-listes de E ; c'est le nombre de choix successifs de p éléments de E.
– Nombre de p-listes sans répétition de E (ou p-arrangements) ; c'est le nombre de choix successifs sans répétition de p éléments de E. Nombre d'applications injectives de E vers F.
– Permutations (définies comme les $card(E)$-listes sans répétition de E). Nombre de permutations ; c'est le nombre de choix successifs sans répétition de tous les éléments de E. Nombre d'applications bijectives de E vers E.
– Combinaisons. Nombre de p-combinaisons ; c'est le nombre de choix simultané de p éléments différents dans E. $card(\mathscr{P}(E)) = 2^{card(E)}$.

Remarque : Le TD sur les dénombrements n'a été que débuté ; il faudra guider les élèves sur les exercices.