COLLES - BCPST1

SEMAINE 23/30 : DU 4 AU 8 AVRIL

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les quatre suivantes :

- Unicité de la limite : Soient x_0, ℓ_1, ℓ_2 3 réels ; si la fonction f admet ℓ_1 ainsi que ℓ_2 pour limites en x_0 alors $\ell_1 = \ell_2$.
- Limite d'une somme : soit x_0, ℓ, ℓ' 3 réels ; si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.
- Limite d'une somme : soit x_0, ℓ 2 réels ; si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$.
- Théorème de la limite monotone : Soient $a < b$ deux réels ; si f est croissante et majorée sur $]a;b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f = \operatorname*{Sup}\limits_{]a;b[} f$.

Les exercices porteront sur le chapitre "dénombrements" et sur le chapitre "Limites de fonctions".

Dénombrements

- Cardinal d'un ensemble fini. Théorème fondamental : deux ensembles finis E et F ont même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E vers F.
- $A \subset E \implies card(A) \leqslant card(E)$ avec égalité ssi $A = E$.
- Comparaison des cardinaux de E et F lorsqu'il existe une injection, une surjection, de E vers F.
  Si $card(E) = card(F)$, alors $f : E \to F$ est injective ssi surjective ssi bijective.
- Cardinal d'une réunion de deux ensembles disjoints. Cardinal d'une réunion d'une famille finie d'ensembles 2 à 2 disjoints. Cardinal d'une réunion de deux ensembles.
- Cardinal d'un produit cartésien. Nombre d'applications entre 2 ensembles finis. Nombre de p-listes de E ; c'est le nombre de choix successifs de p éléments de E.

- Nombre de p-listes sans répétition de E (ou p-arrangements) ; c'est le nombre de choix successifs sans répétition de p éléments de E. Nombre d'applications injectives de E vers F.
- Permutations (définies comme les $card(E)$-listes sans répétition de E). Nombre de permutations ; c'est le nombre de choix successifs sans répétition de tous les éléments de E. Nombre d'applications bijectives de E vers E.
- Combinaisons. Nombre de p-combinaisons ; c'est le nombre de choix simultané de p éléments différents dans E. $card(\mathscr{P}(E)) = 2^{card(E)}$.

Limites de fonction

- Définitions : limite finie/infinie d'une fonction réelle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Limites à droite et à gauche en $x_0 \in \mathbb{R}$.
  $\lim_{x_0} f(x) = L \implies \lim_{x_0^+} f(x) = \lim_{x_0^-} f(x) = L$.
  $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x_0^+} f(x) = \lim_{x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Limites par valeur supérieure/inférieure.
  Interprétation grapique d'une limite finie en $\pm\infty$ ou infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$: asymptôtes horizontale/verticale. Asymptôtes obliques.
- Opérations sur les limites.
  Théorèmes de composition des limites.
- Limite et signe de la fonction. Limite d'une fonction minorée, majorée.
  Théorèmes des gendarmes (versions limite finie ou infinie).
  Théorème de la limite monotone.
- Limites usuelles (limites des fonctions usuelles, croissance comparée, limites en 0 de : $\sin(h)/h$, $\tan(h)/h$, $\ln(1+h)/h$, $(e^h-1)/h$, $(1-\cos(h))/h^2$, $(\sqrt{1+h}-1)/h$).
- Méthodes pour lever une indéterminée.

Remarque : Le TD n'a été qu'entamé. Juste du calcul de limite, et pas encore d'équivalents cette semaine.