

COLLES - BCPST1

SEMAINE 24/30 : DU 11 AU 15 AVRIL

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les quatre suivantes :

- Théorème des gendarmes : cas d'une limite finie.
- Théorème de la limite monotone : Soient $a < b$ deux réels ; si f est croissante et majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f = \text{Sup}_{]a; b[} f$.
- Théorème de la limite monotone : Soient $a < b$ deux réels ; si f est croissante et non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f = +\infty$.
- Théorème de la bijection.

Les exercices porteront sur les chapitres "Limites de fonctions" et "Continuité".

Limites de fonction

- Définitions : limite finie/infinie d'une fonction réelle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Limites à droite et à gauche en $x_0 \in \mathbb{R}$.
 $\lim_{x_0} f(x) = L \implies \lim_{x_0^+} f(x) = \lim_{x_0^-} f(x) = L$.
 $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x_0^+} f(x) = \lim_{x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Limites par valeur supérieure/inférieure.
Interprétation graphique d'une limite finie en $\pm\infty$ ou infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$: asymptôtes horizontale/verticale. Asymptôtes obliques.
- Opérations sur les limites.
Théorèmes de composition des limites.
- Limite et signe de la fonction. Limite d'une fonction minorée, majorée.
Théorèmes des gendarmes (versions limite finie ou infinie).
Théorème de la limite monotone.
- Limites usuelles (limites des fonctions usuelles, croissance comparée, limites en 0 de : $\sin(h)/h$, $\tan(h)/h$, $\ln(1+h)/h$, $(e^h - 1)/h$, $(1 - \cos(h))/h^2$, $(\sqrt{1+h} - 1)/h$).
- Méthodes pour lever une indéterminée.
- Équivalents (en a pour des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a).
Propriétés, équivalents usuels, liens avec la limite, substitution. Obtention d'équivalents de suites à partir d'équivalents de fonctions.

Continuité

- Définition de la continuité en un point. Prolongement par continuité.
Continuité à droite/gauche.
Continuité sur un intervalle.
Fonctions usuelles continues. Opérations préservant la continuité.
- Théorème(s) des valeurs intermédiaires.
- Recherche de valeurs approchées de racine par dichotomie.
Une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de la bijection.
Applications : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$; $x \mapsto \arctan(x)$.

Remarque : le TD n'a été que débuté; on reste limité sur les développements.