COLLES - BCPST1

SEMAINE 30/30 : DU 6 AU 10 JUIN

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les quatres suivantes :

- Une famille de vecteurs est liée ssi l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; $\mathrm{Ker}f$ est un s.e.v. de E ; $\mathrm{Im}f$ est un s.e.v. de F.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; f est injective ssi $\mathrm{Ker}f = \left\{ O_E \right\}$.

Les exercices porteront sur les chapitres "VAR", ainsi que "Espaces vectoriels" et "Applications linéaires". Sur ces deux derniers, les seuls exercices posés pourront être :
– Montrer que sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v. ; en déterminer une base.
– Montrer qu'une famille de vecteurs est libre.
– Montrer qu'une application est linéaire. Déterminer son noyau et son image. En déduire son injectivité/surjectivité/bijectivité.

Variables aléatoires

- Définition d'une V.A.R. sur un espace probabilisé fini. Univers image.
- Exemple de l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de $A \subset \Omega$.
- Loi de probabilité d'une V.A.R. Histogramme de la loi.
  La famille $((X = k))_{k \in X(\Omega)}$ forme un S.C.E.
- Fonction de répartition. Propriétés (croissance, liens avec la loi de X, Courbe représentative).
- Espérance. Propriétés (espérance d'une variable constante, positive, d'une indicatrice, croissance de l'espérance), théorème de transfert, linéarité de l'espérance. Loi centrée.
- Moments. Variance, écart-type. Propriétés : $V(aX + b) = a^2 V(X)$, Formule de König-Huygens.
- Indépendance de deux ou plusieurs V.A.R.. Propriétés ; lemme de coalition. Espérance et variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

– Lois usuelles : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
– Loi de la somme de variables indépendantes suivant une même loi de Bernoulli.

Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$

– Addition et multiplication par un scalaire dans $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Propriétés.
– Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, .)$.
– Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Intersection de s.e.v.
– Sous espace vectoriel $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ engendré par une famille de vecteurs. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. Propriétés.
– Obtention d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel décrit à l'aide d'équation(s) cartésienne(s). Obtention d'équation(s) cartésienne(s) décrivant un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
– Familles libres, familles liées. Propriétés.
– Base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Dimension. Base canonique de $\mathbb{K}^n$.
– Propriétés pour une famille libre, génératrice dans un sous-espace vectoriel de dimension n. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille libre, ou génératrice soit une base. Obtention d'une base pour un sous-espace vectoriel.
– Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
– Rang d'une famille de vecteurs (c'est la dimension du sous espace vectoriel qu'elle engendre). Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice de ses coordonnées dans n'importe quelle base.
– Application du rang pour déterminer si une famille de vecteurs est libre, génératrice.

Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$.

– Définitions. Endomorphismes, Isomorphismes, Automorphismes. Applications linéaires entre s.e.v.
– Propriétés algébriques de $(\mathscr{L}(E, F), +, .)$ et de $(\mathscr{L}(E), +, \circ, .)$
– Noyau et image d'une application linéaire. Propriétés.
– Une application linéaire est uniquement déterminée par les images $(f(e_i))_{e_i \in \mathscr{B}}$ des vecteurs d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$.
– Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité à l'aide de $(f(e_i))_{i \in \mathscr{B}}$. Équivalence de l'injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme.

- Matrice associée $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ à une application linéaire f relativement à des bases $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{K}^p$. Propriétés.
- Rang d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité à l'aide du rang.
- Théorème du rang.
- Rang d'une matrice : c'est le rang d'une application linéaire associée (relativement à des bases).
- Calcul de rang : Le rang est égal au nombre de pivots d'une matrice échelonnée obtenues après opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Rang d'une matrice transposée.