

COLLES - BCPST1

SEMAINE 9/30 : DU 29 NOVEMBRE AU 4 DÉCEMBRE

Question de cours : Une au choix (avec sa démonstration) parmi les quatre suivantes :

- Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Formules de l'angle moitié :
 $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2 \cos \frac{a-b}{2}$ et $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2i \sin \frac{a-b}{2}$
- Formule de la somme d'entiers consécutifs $\sum_{k=p}^n k$ avec $0 \leq p \leq n$.
- Somme télescopique : $\sum_{k=p}^n u_k - u_{k+1}$.

Les exercices porteront sur les nombres complexes et le calcul de sommes.

Les nombres complexes

- Écriture algébrique, conjugué d'un complexe, propriétés.
- Module, propriétés, inégalité triangulaire.
- Plan complexe. Affixe d'un point, d'un vecteur, interprétation géométrique du module.
- Argument d'un complexe non nul. Propriétés. Interprétation géométrique. Écriture trigonométrique d'un complexe non nul.
- Notation $e^{i\theta}$. Propriétés. Écriture exponentielle d'un complexe non nul.
- Fonction exponentielle complexe. Propriétés.
- Formules d'Euler. Application à la linéarisation de $\cos^p \cdot \sin^q$ (pour de petites valeurs de p et q). Méthode de l'angle moitié (écriture sous forme exponentielle de $e^{ia} \pm e^{ib}$)
- Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels.
- Résolution d'une équation de la forme $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Calcul de Sommes

- Notation $\sum$. Formules de $\sum_{k=1}^n 1$, $\sum_{k=p}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$, $\sum_{k=p}^n q^k$.
- Propriétés : linéarité, décrochage, changement d'indice, sommes télescopiques.
- Sommes doubles de la forme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j}$,
 $\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j}$; décomposition par ligne, par colonne.