Exercice 1

1) La ligne ($n=5$) du triangle de Pascal est 1 5 10 10 5 1 donc par la formule du binôme de Newton, on obtient :
$(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^5 = (\cos(\theta))^5+5(\cos(\theta))^4(\mathrm{i}\sin(\theta))+10(\cos(\theta))^3(\mathrm{i}\sin(\theta))^2+10(\cos(\theta))^2(\mathrm{i}\sin(\theta))^3+5(\cos(\theta))(\mathrm{i}\sin(\theta))^4+(\mathrm{i}\sin(\theta))^5$

$(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^5 = (\cos(\theta))^5+5\mathrm{i}(\cos(\theta))^4\sin(\theta)-10(\cos(\theta))^3(\sin(\theta))^2-10\mathrm{i}(\cos(\theta))^2(\sin(\theta))^3+5\cos(\theta)(\sin(\theta))^4+\mathrm{i}(\sin(\theta))^5$ car $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4=1$ et $\mathrm{i}^5=\mathrm{i}$.

2) Puisque $\sin(5\theta)=Im\left(e^{\mathrm{i}5\theta}\right)$, en identifiant les parties imaginaires :
$\sin(5\theta)=5(\cos(\theta))^4\sin(\theta)-10(\cos(\theta))^2(\sin(\theta))^3+(\sin(\theta))^5$

On remplace $\cos^2(\theta)$ par $1-\sin^2(\theta)$:

$$\begin{aligned}\sin(5\theta)&=5(1-\sin^2(\theta))^2\sin(\theta)-10(1-\sin^2(\theta))\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\\&=5(1-2\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta))\sin(\theta)-10(1-\sin^2(\theta))\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(5\theta)=16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)}$$

3) Remplaçons θ par $\frac{\pi}{5}$ dans l'égalité obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}0&=\sin(\pi)=\sin\left(5\tfrac{\pi}{5}\right)=16\sin^5\left(\tfrac{\pi}{5}\right)-20\sin^3\left(\tfrac{\pi}{5}\right)+5\sin\left(\tfrac{\pi}{5}\right)\\&=\sin\left(\tfrac{\pi}{5}\right)\left(16\sin^4\left(\tfrac{\pi}{5}\right)-20\sin^2\left(\tfrac{\pi}{5}\right)+5\right)\end{aligned}$$

Or $\frac{\pi}{5}\in]0,\pi[$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\neq 0$. On en déduit que $16\sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right)-20\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+5=0$.

Autrement dit, $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ est solution de l'équation } (E)\ :\ 16x^4-20x^2+5=0.}$

4) On pose $X=x^2$.
$(E)\iff 16X^2-20X+5=0$
Le discriminant de ce trinôme du second degré en X est :
$\Delta=(-20)^2-4\times16\times5=20^2-20\times16=20(20-16)=20\times4=80$.
$\sqrt{80}=\sqrt{2^4\times5}=\sqrt{(2^2)^2\times5}=2^2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.
Les solutions de (E) d'inconnue X sont $X_1=\frac{20-4\sqrt{5}}{32}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $X_2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$.
X_1 et X_2 sont distinctes car $\Delta\neq0$.
Il est clair que $X_2>0$. D'après les relations coefficients-racines, $X_1X_2=\frac{5}{16}>0$ donc $X_1>0$.

$$\begin{aligned}(E)&\iff X=X_1 \text{ ou } X=X_2\iff x^2=X_1 \text{ ou } x^2=X_2\\&\iff x=\sqrt{X_1}\text{ ou } x=-\sqrt{X_1}\text{ ou } x=\sqrt{X_2}\text{ ou } x=-\sqrt{X_2}\end{aligned}$$

Les quatre nombres $\sqrt{X_1}$, $-\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$, $-\sqrt{X_2}$ sont distincts deux à deux car $0<X_1<X_2$. Par conséquent $\boxed{\mathscr{S}_{(E)}=\left\{-\sqrt{X_2},\ -\sqrt{X_1},\ \sqrt{X_1},\ \sqrt{X_2}\right\}}$

5) D'après les deux questions précédentes, on a :
$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\in\left\{-\sqrt{X_2},\ -\sqrt{X_1},\ \sqrt{X_1},\ \sqrt{X_2}\right\}$. Autrement dit, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est l'un des quatre nombres : $-\sqrt{X_2}$, $-\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$.
$\frac{\pi}{5}\in]0,\pi[$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ ce qui entraine qu'aucun des deux nombres $-\sqrt{X_1}$ et $-\sqrt{X_2}$ ne peut être égal à $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
On a $\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur lequel la fonction sinus est strictement croissante donc $0=\sin(0)<\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
En élevant au carré, on obtient : $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)<\frac{1}{2}$.
$\sqrt{5}>0$ donc $5+\sqrt{5}>5$ d'où $X_2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}>\frac{5}{8}>\frac{1}{2}$.
On en déduit que $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)<\frac{1}{2}<X_2$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)<\sqrt{X_2}$. En particulier $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ n'est pas égal à $\sqrt{X_2}$.

La seule valeur possible pour $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est donc $\sqrt{X_1}$. $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$

6) $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
$\frac{\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\geqslant0$.
D'après ce qui précède, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$.
D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}$$

Exercice 2

1) a) Écriture algébrique de z.

$$z=\frac{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{\sqrt{2}(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3})$$

$$\boxed{z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

b) Pour donner l'écriture sous forme trigonométrique de z, on détermine d'abord l'écriture sous forme exponentielle de u et v :

$$u = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\Longrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

c) On en déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \qquad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

2) a) Écriture algébrique de z^2 :

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 2+\sqrt{3} + 2i \times \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= \boxed{2\sqrt{3}+2i} \end{aligned}$$

b) Module et argument de z^2.

$$|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4\times 3+4} = \sqrt{16} = \boxed{4 = |z^2|}$$

Soit θ un argument de z^2. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$.

c) De $|z^2| = |z|^2 = 4$ et $\arg(z^2) \equiv 2\arg(z)\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ on en déduit que $|z| = 2$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{12}\ [\pi]$.
Ainsi $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \pi + \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$, ce qu'il faut encore déterminer.
Mais puisque $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $Re(z) > 0$, on en déduit que :

$$\boxed{|z| = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg(z) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]}$$

d) On en déduit que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

3) Soit $(E) : z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

a) L'équation (E) est un équation du second degré à coefficients complexes.

$$z^2 - \frac{\sqrt{3}+i}{2} = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = 0^2 + 4\times 1 \times \frac{\sqrt{3}+i}{2} = 2\sqrt{3}+2i$, dont on cherche une "racine carrée". Pour cela on met Δ sous forme exponentielle :

$$|\Delta| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

Ainsi un argument θ de Δ vérifie :

$$\cos(\theta) = \frac{Re(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{Im(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\Delta = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = (2e^{i\frac{\pi}{12}})^2$. Les deux solutions de (E) sont donc :

$$\boxed{z_1, z_2 = \pm e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

.

b) On a $a^2+b^2 = |z|^2 = |z^2| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = \boxed{1 = a^2+b^2}$.

c) Soit $z = a+ib$; z est solution de (E) si et seulement si :

$$(a+ib)^2 = a^2+2iab-b^2 = a^2-b^2+i\times 2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2} \iff \begin{cases} a^2-b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Puisque par ailleurs $a^2+b^2=1$, on obtient le système suivant qui permet de déterminer a^2 et b^2 :

$$\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2b^2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ b^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Ainsi nécessairement $a=\pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $b=\pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Mais par ailleurs $ab=\dfrac{1}{4}>0$ donc a et b ont nécessairement même signe.
On obtient donc les deux solutions possibles :

$$\boxed{z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_1=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}.$$

Puisque (E) admet exactement deux solutions, ce sont bien les deux solutions de (E).

d) Puisque $\dfrac{\pi}{12}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\geqslant 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\geqslant 0$. Aussi, de a) et c) il découle :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

dont on déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Re(z)}{|z|}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Im(z)}{|z|}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

4) Par les 3 méthodes on a obtenu :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Vérifier que les résultats sont cohérents revient à vérifier les égalités :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Puisque tout est positif :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \iff \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$$
$$\iff \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} \iff \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16} \iff \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

ce qui est vrai. De même, puisque $2\geq\sqrt{3}$ (car $2^2=4\geq\sqrt{3}^2=3$) et $\sqrt{6}\geq\geq\sqrt{2}$, on peut élever la deuxième égalité au carré en conservant l'équivalence :

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \iff \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$
$$\iff \frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{6+2-2\sqrt{12}}{16} \iff \frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{8-4\sqrt{3}}{16} \iff \frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les résultats obtenus par les 3 méthodes sont donc cohérents.

Exercice 3

Calculs de sommes

1) Calcul par télescopage.

a)

$$\sum_{k=0}^{n}3k^2+3k+1=\sum_{k=0}^{n}\left[k^3+3k^2++3k+1-k^3\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]$$
$$=(n+1)^3-0^3=\boxed{(n+1)^3}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\boxed{1-\frac{1}{(n+1)!}}$$

c)

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{n}[\ln(k-1)+\ln(k+1)-\ln(k)-\ln(k)]$$
$$=\sum_{k=2}^{n}[\ln(k-1)-\ln(k)]+\sum_{k=2}^{n}[\ln(k+1)-\ln(k)]$$
$$=\ln(1)-\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(2)$$
$$=\boxed{\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}$$

d) Soit $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k+1}=\frac{a(k+1)+b(k-1)}{(k-1)(k+1)}=\frac{k(a+b)+(a-b)}{k^2-1}$$

Ainsi, pour que : $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ \dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{a}{k-1}+\dfrac{b}{k+1}$ il suffit que :

$$\begin{cases}a+b=0\\a-b=1\end{cases}\iff\begin{cases}b=-a\\a-b=1\end{cases}\iff\begin{cases}b=-a\\2a=1\end{cases}\iff\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

On obtient donc, pout tout $k\in\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{1}{2(k-1)}-\dfrac{1}{2(k+1)}$.

Ainsi :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\times\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}\times\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$$

$$=\frac{3n(n+1)-(2n+2)-2n}{4n(n+1)}=\frac{3n^2-n-2}{4n(n+1)}=\boxed{\frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}}$$

2) Calcul de sommes doubles.

a)

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}ij=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}ij=\sum_{i=1}^{n}i\times\frac{(n-i+1)(i+n)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i(n^2+n)+i^2(n+1-n)-i^3$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}\times\frac{3n^2+7n+2}{6}=\boxed{\frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{24}}$$

b)

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)$$
$$=\boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$

c)

$$\sum_{1\le i,j\le n}|i-j|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}|i-j|+\sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}(i-j)+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{i(i+1)}{2}+\frac{(n-i)(n+i+1)}{2}-(n-i)i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}i^2\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)+i\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}-n\right)+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \times (-n-1) + n \times \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6} \times (2n+1+3(-n-1)+3n)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \boxed{\frac{n(n^2-1)}{3}}$$

3)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha + (n-k)\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Re\left(e^{\mathrm{i}(k\alpha+(n-k)\beta)}\right)$$
$$= Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\mathrm{i}(k\alpha+(n-k)\beta)}\right)$$
$$= Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\mathrm{i}k\alpha} \times e^{\mathrm{i}(n-k)\beta}\right)$$
$$= Re\left(e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{\mathrm{i}\beta}\right)^n \qquad \text{formule du binome}$$
$$= Re\left(\left(e^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^n\right) \qquad \text{angle moitié}$$
$$= \boxed{2^n \cos\left(n \times \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \times \cos^n\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

4)

$$(1+\mathrm{i}\tan\theta)^n = \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}\right)^n = \left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{\cos\theta}\right)^n = \boxed{\frac{e^{\mathrm{i}n\theta}}{\cos^n\theta}}$$
$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \tan^k\theta}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \tan^k\theta = \sum_{0\le 2p\le n} \binom{n}{2p} i^{2p} \tan^{2p}\theta + \sum_{0\le 2p+1\le n} \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} \tan^{2p+1}\theta$$
$$= \sum_{0\le 2p\le n} \binom{n}{2p} (-1)^p \tan^{2p}\theta \; + \; \mathrm{i} \times \sum_{0\le 2p+1\le n} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \tan^{2p+1}\theta$$
$$= \frac{\cos n\theta}{\cos^n\theta} + \mathrm{i} \times \frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}$$

Ainsi en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\boxed{\sum_{0\le 2p\le n} \binom{n}{2p} (-1)^p \tan^{2p}\theta = \frac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}} \quad ; \quad \boxed{\sum_{0\le 2p+1\le n} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \tan^{2p+1}\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}}$$

Exercice 4

1.a) On a :

$$1^3 = 1 \quad ; \quad \left(e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = e^{2\mathrm{i}\pi} = 1 \quad ; \quad \left(e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = e^{4\mathrm{i}\pi} = 1$$

Ainsi w^0, w^1, w^2 sont solutions de (E).

1.b)

$$1 + e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = 1 + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i} \times \left(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \mathrm{i} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{0}$$

car $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$.

$$1 + e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} + e^{\frac{8\mathrm{i}\pi}{3}} = 1 + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{3} + \mathrm{i} \times \left(\sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{8\pi}{3}\right)$$
$$= 1 + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \times \left(\sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \mathrm{i} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{0}$$

car $\frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$.

2.a) On a $w^n = \left(e^{2i\frac{\pi}{n}}\right)^n = e^{2i\frac{n\pi}{n}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$. Ainsi, w est solution de l'équation (E).

2.b) Puisque $n > 1$, on a $w = e^{2i\frac{\pi}{n}} \neq 1$, et donc :

$$\boxed{\sum_{q=0}^{n-1} w^q = \frac{1-w^n}{1-w} = \frac{1-1}{1-w} = 0}$$

2.b) Soit $k \in [[0, n-1]]$. Alors $(w^k)^n = (w^n)^k \underset{1.a)}{=} 1^k = 1$. Ainsi, pour tout $k \in [[0, n-1]]$, w^k est solution de l'équation (E).

On a $w^k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$; ainsi $w^k = 1$ si et seulement si $\frac{2k\pi}{n}$ est un multiple de 2π, c'est-à-dire si et seulement si k est un multiple de n.
Or k est dans l'ensemble $[[0, n-1]]$, où le seul multiple de n est 0. Ainsi, $w^k = 1$ si et seulement si $k = 0$. On obtient donc les deux cas :

• si $k \neq 0$:

$$\boxed{\sum_{q=0}^{n-1} \left(w^k\right)^q = \frac{1-(w^k)^n}{1-w^k} = \frac{1-1}{1-w^k} = 0}$$

• si $k = 0$:

$$\boxed{\sum_{q=0}^{n-1} \left(w^0\right)^q = \sum_{q=0}^{n-1} 1^q = n}$$

3.a) On applique la formule du binôme :

$$(1+\omega^q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(w^q\right)^k = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{q\times k}}.$$

3.b) En appliquant 3.a), on obtient la somme double :

$$\sum_{q=0}^{n-1}(1+\omega^q)^n = \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{q\times k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{q\times k} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{q=0}^{n-1} (w^k)^q}$$

3.c) D'après 3.b), pour $k \in [[0, n-1]]$:

$$\sum_{q=0}^{n-1} (w^k)^q = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ n & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

D'autre part, puisque $w^n = 1$:

$$\sum_{q=0}^{n-1} (w^n)^q = \sum_{q=0}^{n-1} 1 = n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n-1}(1+\omega^q)^n &\underset{2.b}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{q=0}^{n-1}(w^k)^q \\
&= \binom{n}{0}\underbrace{\sum_{q=0}^{n-1}(w^0)^q}_{=n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{q=0}^{n-1}(w^k)^q}_{=0} + \binom{n}{n}\underbrace{\sum_{q=0}^{n-1}(w^n)^q}_{=n} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} n + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} n = n + n = \boxed{2n}.
\end{aligned}$$

3.d) On applique la même stratégie que dans les questions précédentes.
En appliquant la formule du binôme :

$$(1-\omega^q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k} \left(-w^q\right)^k = \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k w^{q\times k}}.$$

On en déduit la somme double :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n-1}(1-\omega^q)^n &= \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k w^{q\times k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k w^{q\times k} \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{q=0}^{n-1}(w^k)^q}
\end{aligned}$$

Finalement, de façon analogue à 3.c) :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n-1}(1-\omega^q)^n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{q=0}^{n-1}(w^k)^q \\
&= \underbrace{(1)^0\binom{n}{0}}_{=1}\underbrace{\sum_{q=0}^{n-1}(w^0)^q}_{=n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{q=0}^{n-1}(w^k)^q}_{=0} + \underbrace{(-1)^n\binom{n}{n}}_{=(-1)^n}\underbrace{\sum_{q=0}^{n-1}(w^n)^q}_{=n} \\
&= \boxed{n+(-1)^n\times n}.
\end{aligned}$$