Exercice 1

1) a) Écriture algébrique de z.

$$z=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{\sqrt{2}(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3})$$

$$\boxed{z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

b) Pour donner l'écriture sous forme trigonométrique de z, on détermine d'abord l'écriture sous forme exponentielle de u et v :

$$u=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad v=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Longrightarrow z=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=e^{i\frac{\pi}{12}}=\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

c) On en déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \qquad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

2) a) Écriture algébrique de z^2 :

$$\begin{aligned}
z^2&=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2\\
&=2+\sqrt{3}+2i\times\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}-(2-\sqrt{3})\\
&=2\sqrt{3}+2i\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}\\
&=\boxed{2\sqrt{3}+2i}
\end{aligned}$$

b) Module et argument de z^2.

$$|z^2|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{4\times 3+4}=\sqrt{16}=\boxed{4=|z^2|}$$

Soit θ un argument de z^2. On a :

$$\cos(\theta)=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$.

c) De $|z^2|=|z|^2=4$ et $\arg(z^2)\equiv 2\arg(z)\ [2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ on en déduit que $|z|=2$ et $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{12}\ [\pi]$.

Ainsi $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $\arg(z)\equiv\pi+\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$, ce qu'il faut encore déterminer.

Mais puisque $\frac{\pi}{12}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $Re(z)>0$, on en déduit que :

$$\boxed{|z|=2} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg(z)\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]}$$

d) On en déduit que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Re(z)}{|z|}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Im(z)}{|z|}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

3) Par les 2 méthodes on a obtenu :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Vérifier que les résultats sont cohérents revient à vérifier les égalités :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Puisque tout est positif :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \iff \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$$
$$\iff \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} \iff \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16} \iff \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

ce qui est vrai. De même, puisque $2\geq\sqrt{3}$ (car $2^2=4\geq\sqrt{3}^2=3$) et $\sqrt{6}\geq\sqrt{2}$, on peut élever la deuxième égalité au carré en conservant l'équivalence :

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \iff \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$\iff \frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{6+2-2\sqrt{12}}{16} \iff \frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{8-4\sqrt{3}}{16} \iff \frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les résultats obtenus par les 2 méthodes sont donc cohérents.

Exercice 2

1. (a) On se ramène par linéarité aux sommes de 1, d'entiers consécutifs, et de carrés d'entiers consécutifs.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (3k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n 9k^2-6k+1 = 9\sum_{k=1}^n k^2 - 6\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1\\ &= 9\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\frac{n(n+1)}{2}+n\\ &= n\times\left(\frac{3}{2}(n+1)(2n+1)-3(n+1)+1\right)\\ &= n\times\left(3n^2+\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}}\end{aligned}$$

(b) On se ramène à une somme de termes consécutifs de suites géométriques.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 3^{2k-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3}\times(3^2)^k\\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^n 9^k\\ &= \frac{1}{3}\times 9\times\frac{1-9^n}{1-9}\\ &= \boxed{\frac{3}{8}\times(9^n-1)}\end{aligned}$$

(c) On procède au changement d'indice $j=k-1$:

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = 0+\sum_{j=1}^{n-1} j^3 = \boxed{\frac{n^2(n-1)^2}{4}}$$

2. (a)

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n i = \sum_{i=1}^n n\times i = n\times\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n ij = \sum_{i=1}^n i\times\frac{(n-i+1)(i+n)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i(n^2+n)+i^2(n+1-n)-i^3\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\times\frac{3n^2+7n+2}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{24}}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\sum_{i=j}^n \frac{j^2}{i} &= \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\frac{j^2}{i} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^i \frac{j^2}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\sum_{j=1}^i j^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n (i+1)(2i+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n (2i^2+3i+1)\\ &= \frac{2}{6}\sum_{i=1}^n i^2+\frac{3}{6}\sum_{i=1}^n i+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^n 1\\ &= \frac{2}{6}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3}{6}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{6}\\ &= \frac{n}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{3}+\frac{3}{2}(n+1)+1\right) = \boxed{\frac{n}{36}\times(4n^2+15n+17)}\end{aligned}$$

3. (a) La somme se calcule par télescopage :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k-1)-\ln(k)) = \ln(1)-\ln(n) = \boxed{-\ln n}$$

(b) La somme se calcule encore par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)-\ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)\\
&= \ln(1)-\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(2)\\
&= \boxed{\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

(c) Ici encore la somme se calcule par télescopage après avoir remarqué que $k.k! = (k+1).k! - k! = (k+1)! - k!$:

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1! = \boxed{(n+1)!-1}$$

Exercice 3

1) a) Linéarisons à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos(2x)\sin^3(x) &= \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\times\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\
&= -\frac{1}{16i}\times\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)\times\left(e^{i3x}-3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}-e^{-i3x}\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\times\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)\times\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\times\left(e^{i5x}-3e^{i3x}+3e^{ix}-e^{-ix}+e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-i3x}-e^{-i5x}\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\times\left(e^{i5x}-e^{-i5x}-3\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)+4\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\times\left(2i\sin(5x)-6i\sin(3x)+8i\sin(x)\right)\\
&= \boxed{-\frac{1}{8}\sin(5x)+\frac{3}{8}\sin(3x)-\frac{1}{2}\sin(x)}
\end{aligned}$$

b) L'équation (E_1) devient donc :

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff -\frac{1}{8}\sin(5x)+\frac{3}{8}\sin(3x)-\frac{1}{2}\sin(x) = -\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{3}{8}\sin(3x)\\
&\iff \boxed{\sin(5x)=\cos(x)}
\end{aligned}$$

c) Pour résoudre (E_1), on résout l'équation $\sin(5x)=\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin(5x)=\cos(x) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=\cos(x)\\
&\iff \begin{cases} x\equiv \frac{\pi}{2}-5x\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ x\equiv -\frac{\pi}{2}+5x\ [2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases} 6x\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ 4x\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x\equiv \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]\\ \text{ou}\\ x\equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \implies \boxed{\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}}
\end{aligned}$$

2) a) On a par définition :

$$\begin{aligned}
e^{i4x}-e^{i3x} &= \cos(4x)+i\sin(4x)-\cos(3x)-i\sin(3x)\\
&= \underbrace{\cos(4x)-\cos(3x)}_{=\text{partie réelle}}+i\underbrace{(\sin(4x)-\sin(3x))}_{=\text{partie imaginaire}}
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\boxed{\sin(4x)-\sin(3x)=Im\left(e^{i4x}-e^{i3x}\right)}$$

b) Appliquons la méthode de l'angle moitié à $e^{i4x}-e^{i3x}$:

$$\begin{aligned}
e^{i4x}-e^{i3x} &= e^{i\frac{7}{2}x}\times\left(e^{i\frac{1}{2}x}-e^{-i\frac{1}{2}x}\right)\\
&= e^{i\frac{7}{2}x}\times 2i\sin\frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

Écrivons ensuite sous forme algébrique $e^{i\frac{7}{2}x}\times 2i\sin\frac{1}{2}x$ pour en retirer sa partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{7}{2}x}\times 2i\sin\frac{1}{2}x &= \left(\cos\frac{7}{2}x+i\sin\frac{7}{2}x\right)\times 2i\sin\frac{1}{2}x\\
&= \underbrace{-2\sin\frac{7}{2}x\times\sin\frac{1}{2}x}_{=\text{partie réelle}}+i\times\underbrace{2\cos\frac{7}{2}x\times\sin\frac{1}{2}x}_{=\text{partie imaginaire}}
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\boxed{\sin(4x)-\sin(3x)=Im\left(e^{i4x}-e^{i3x}\right)=2\sin\frac{1}{2}x\times\cos\frac{7}{2}x}$$

c) $\boxed{\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)}$.

d) Avec b), l'équation (E_2) devient :

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff \sin(x) + 2\sin\frac{1}{2}x \times \cos\frac{7}{2}x = 0 \\
&\underset{c)}{\iff} 2\sin\frac{1}{2}x \times \cos\frac{1}{2}x + 2\sin\frac{1}{2}x \times \cos\frac{7}{2}x = 0 \\
&\iff 2\sin\frac{1}{2}x \times \left(\cos\frac{1}{2}x + \cos\frac{7}{2}x\right) = 0 \\
&\iff \begin{cases} 2\sin\frac{1}{2}x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{1}{2}x + \cos\frac{7}{2}x = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{1}{2}x = -\cos\frac{7}{2}x \end{cases}}
\end{aligned}$$

e) Avec l'équivalence obtenue à la question précédente, il ne reste plus pour résoudre (E_2) qu'à résoudre séparément les deux équations $\sin\frac{1}{2}x = 0$ et $\cos\frac{1}{2}x = -\cos\frac{7}{2}x$ et prendre la réunion des deux ensembles solutions obtenus.

$$\sin\frac{1}{2}x = 0 \iff \frac{1}{2}x \equiv 0\ [\pi] \iff x \equiv 0\ [2\pi] \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}x = -\cos\frac{7}{2}x &\iff \cos\frac{1}{2}x = \cos\left(\pi - \frac{7}{2}x\right) \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x \equiv \pi - \frac{7}{2}x\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2}x \equiv \frac{7}{2}x - \pi\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{8}{2}x \equiv \pi\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{6}{2}x \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 4x \equiv \pi\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \\
&\iff s \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right\}}$$

Exercice 4

1. $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

2.

```python
def sommeCarres(n):
        S = 0
        for k in range(1,n+1):
                S = S + k**2
        return S
```

3. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

4. (a) La ligne correspondant à $n = 3$ dans le triangle de Pascal est 1 3 3 1, d'après la formule de du binôme de Newton, $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$ donc $\boxed{k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1}$.

   (b) Par somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3}_{\text{somme télescopique}} = n^3 - 0^3 = \boxed{n^3}$$

   (c) D'après la question précédente, et par linéarité de la $\sum$:

$$n^3 = 3S_n - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S_n - 3\frac{n(n+1)}{2} + n \text{ soit}$$

$$3S_n = n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n}{2}\big(2n^2 + 3(n+1) - 2\big) = \frac{n}{2}(2n^2 + 3n + 1)$$

   or $(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$ donc on retrouve $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

5. (a) Soit $n \geq 1$; alors

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

(b) Cela découle immédiatement de la relation de Pascal.

(c) Démontrons par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}$.

Initialisation. Pour $n = 1$, l'égalité devient :
$\dfrac{1 \times 0}{2} = \dbinom{2}{3}$, c'est-à-dire : $0 = 0$. Elle est donc vérifiée au rang 1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}$ (hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(k-1)}{2} &= \frac{(n+1)n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} && \text{par décrochage} \\
&= \frac{(n+1)n}{2} + \binom{n+1}{3} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} && \text{d'après a)} \\
&= \binom{n+2}{3} && \text{d'après la relation de Pascal b)}
\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n + 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, l'assertion étant vraie au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}}.$$

(d) Lorsque $n = 1$, $\dbinom{n+1}{3} = 0$ et $\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6} = 0$; l'égalité est vérifiée.

Lorsque $n \geq 2$:

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{3!(n-2)!} = \boxed{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}}$$

(e) D'après la question 4(c), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}$ il s'ensuit, en utilisant 4(d) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{3}$ et $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} k + 2\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{n(n+1)}{6}\big(3 + 2(n-1)\big)$.

Encore une fois, on retrouve la valeur de S_n : $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ pour $n \geq 1$.