Exercice 1

1. $u_n = n\ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)$.
   (a) $u_n = n\ln\left(\frac{n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right) = n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
   Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-1\leqslant (-1)^n \leqslant 1$, en divisant par $n>0$: $\frac{-1}{n}\leqslant\frac{(-1)^n}{n}\leqslant\frac{1}{n}$. Or $\lim -\frac{1}{n} = \lim\frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\frac{(-1)^n}{n} = 0$.
   On peut donc appliquer l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:
   $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\sim\frac{(-1)^n}{n}$. Par produit d'équivalents : $\boxed{u_n\sim n\frac{(-1)^n}{n}\sim(-1)^n}$.
   (b) Puisque (u_n) est équivalent à la suite $((-1)^n)$ qui n'a pas de limite (ses suites extraites de rang pairs et impairs sont stationnaires en 1 et -1), la suite (u_n) n'a pas de limite.
2. $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{\sin n}{n^2}}-1\right)$.
   (a) Puisque pour tout entier n : $-1\leqslant\sin n\leqslant 1$, en divisant par $n^2>0$: $\frac{-1}{n^2}\leqslant\frac{\sin n}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$. Or $\lim\frac{-1}{n^2} = \lim\frac{1}{n^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\frac{\sin n}{n^2} = 0$. On peut donc appliquer l'équivalent usuel : $\sqrt{1+u}-1\underset{u\to 0}{\sim}\frac{u}{2}$:
   $\sqrt{1+\frac{\sin n}{n^2}}-1\sim\frac{\sin n}{2n^2}$. Par produits d'équivalents : $\boxed{u_n\sim n\frac{\sin n}{2n^2}\sim\frac{\sin n}{2n}}$.
   (b) En appliquant le théorème des gendarmes comme ci-dessus (mais en divisant par $2n$) on obtient que $\lim\frac{\sin n}{2n} = 0$ et donc $\boxed{\lim u_n = 0}$.
3. $u_n = 4^n\left(n^{\frac{1}{n!}}-1\right)$
   (a) On passe à l'écriture en exponentielle $u_n = 4^n\left(\exp\left(\frac{1}{n!}\ln n\right)-1\right)$. Puisque $\lim\frac{\ln n}{n} = 0$ (d'après le théorème de composition des limites en utilisant $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$), alors par produit des limites $\frac{\ln n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{\ln n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   on peut donc appliquer l'équivalent usuel : $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$:
   $\left(n^{\frac{1}{n!}}-1\right) = \left(e^{\frac{1}{n!}\ln n}-1\right)\sim\frac{\ln n}{n!}$. Alors par produit d'équivalents : $\boxed{u_n\sim 4^n\cdot\frac{\ln n}{n!}}$.
   (b) On applique le théorème de comparaison des suites géométrique 4^n et factorielle $n!$: $\lim\frac{4^n}{n!} = 0$. Pas immédiatement, mais plutôt au rang $n-1$, autrement on aboutirait à une indéterminée "$0\times\infty$" :
   $$u_n\sim 4^n\frac{\ln n}{n!} = 4\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{\ln n}{(n-1)!\,n} = 4\cdot\frac{4^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{\ln n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}4\times 0\times 0 = 0$$
   Ainsi $\boxed{\lim u_n = 0}$.

Exercice 2

Il y a 7 matières à ranger dans 7 tiroirs. Un rangement est une application de l'ensemble des matières vers l'ensemble des tiroirs.

1. Il y autant de rangements possibles que d'applications d'un ensemble à 7 éléments (les 7 matières) vers un ensemble à 7 éléments (les 7 tiroirs), soit $\boxed{7^7}$.
2. Il y en a autant de tels rangements que de bijections entre ensembles à 7 éléments (7 matières et 7 tiroirs), ou encore de permutations de 7 éléments, soit $\boxed{7!}$.
3. Il y a autant de rangements qui laissent le premier tiroir vide que d'applications d'un ensemble à 7 éléments (les 7 matières) vers un ensemble à 6 éléments (les 6 derniers tiroirs), c'est à dire $\boxed{6^7}$.
4. Lorsque seul le premier tiroir est vide, tous les autres tiroirs contiennent une seule matière, à l'exception d'un tiroir qui en contient deux. Il y a autant de tels rangements que :
   Nombre de façons de choisir un tiroir parmi les 6 derniers, $\binom{6}{1}$,
   $\times$ Nombre de façons de choisir 2 matières qui seront rangées dans ce tiroir, $\binom{7}{2}$,
   $\times$ Nombre de bijections entre 2 ensembles à 5 éléments (les 5 tiroirs et les 5 matières restants) : 5!.
   Le nombre de rangements ne laissant que le premier tiroir vide est : $\boxed{\binom{6}{1}\times\binom{7}{2}\times 5!}$ qu'on peut simplifier en : $\frac{6\times7\times6\times5!}{2} = \boxed{3\times 7!}$.
5. Le raisonnement est similaire au précédent, sauf que le tiroir vide peut être n'importe lequel des 7 tiroirs. Il faut donc multiplier encore par le nombre de possibilités de choix du tiroir vide, soit 7. Le résultat est donc : $\boxed{7\times\binom{6}{1}\times\binom{7}{2}\times 5!} = \boxed{21\times 7!}$.

6. L'ensemble des cas possibles est réunion de deux sous-ensembles disjoints, selon que les 2 matières littéraires soient rangées ou non dans un même tiroir. Son cardinal est donc somme des cardinaux de ces 2 sous-ensembles.

<u>Premier cas</u>. Si le Français et l'anglais sont dans un même tiroir. Le nombre de rangements recherchés est 7×6^5 qui s'obtient par :

Nombre de façons de choisir le tiroir contenant les matières littéraires : $\binom{7}{1}$

$\times$ Nombre de façons de ranger les matières scientifiques dans les 6 tiroirs restants : 6^5.

<u>Deuxième cas</u>. Si le Français et l'anglais sont dans deux tiroirs différents. Le nombre de rangements recherchés est $7 \times 6 \times 5^5$ qui s'obtient par :

Nombre de façons de choisir le tiroir du Français : $\binom{7}{1}$

$\times$ Nombre de façons de choisir le tiroir de l'anglais parmi les 6 restants : $\binom{6}{1}$

$\times$ Nombre de façons de ranger les 5 matières scientifiques dans les 5 tiroirs restants : 5^5.

Au final le nombre de rangement sans mélange des matières scientifiques et littéraires est : $\boxed{7 \times (6^5 + 6 \times 5^5)}$.

Exercice 3.

1. (a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec : $\mathscr{P}(n)$: "m_n et h_n sont définis et $0 < h_n < m_n$.

(I) Par hypothèse $h_0 = a$ et $m_0 = b$ avec $0 < a < b$; $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.

(H) Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie ; puisque m_n et h_n sont définis et > 0 (par H.R.),

$$m_{n+1} = \frac{m_n + h_n}{2} \qquad \text{et} \qquad h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{m_n} + \frac{1}{h_n}} = \frac{2m_nh_n}{m_n + h_n}$$

sont définis et > 0. Il reste à montrer que $h_{n+1} < m_{n+1}$:

$$\begin{aligned} m_{n+1} - h_{n+1} &= \frac{m_n + h_n}{2} - \frac{2}{\frac{1}{m_n} + \frac{1}{h_n}} \\ &= \frac{m_n + h_n}{2} - \frac{2m_nh_n}{m_n + h_n} \\ &= \frac{(m_n + h_n)^2 - 4m_nh_n}{2(m_n + h_n)} \\ &= \frac{m_n^2 + h_n^2 - 2m_nh_n}{2(m_n + h_n)} \\ &= \frac{(m_n - h_n)^2}{2(m_n + h_n)} > 0 \end{aligned}$$

puisque par (HR) : $0 < h_n < m_n$ ce qui implique $m_n + h_n > 0$ et $m_n - h_n > 0$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vrai. On conclut d'après le principe de récurrence.

(b) Monotonie des suites (m_n) et (h_n) :

$$m_{n+1} - m_n = \frac{m_n + h_n}{2} - m_n = \frac{h_n - m_n}{2} < 0$$

puisque $h_n < m_n$. La suite (m_n) est strictement décroissante.

$$\frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_n}{m_n} + 1\right) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

puisque $0 < h_n < m_n$; la suite (h_n) est strictement croissante.

(c) D'après le théorème de la limite monotone, (m_n) converge puisqu'elle est décroissante et minorée (par 0), et (h_n) converge puisqu'elle est croissante et majorée par m_0 (on aurait pu aussi établir que ces deux suites sont adjacentes. Appelons m_∞ et h_∞ leur limite respective. Par passage à la limite dans la relation de récurrence de (m_n) on a :

$$m_\infty = \frac{m_\infty + h_\infty}{2} \implies m_\infty = h_\infty$$

Elles ont donc même limite qu l'on notera $\ell = m_\infty = h_\infty$ dans la suite.

2. (a) Pour montrer que la suite (m_nh_n) est constante il suffit de montrer que por tout $n \in \mathbb{N}$: $m_{n+1}h_{n+1} = m_nh_n$.

$$m_{n+1}h_{n+1} = \frac{m_n + h_n}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{m_n} + \frac{1}{h_n}} = \frac{m_n + h_n}{\frac{m_n + h_n}{m_nh_n}} = m_nh_n$$

La suite est donc constante égale à $m_0h_0 = ab$. Par passage à la limite on a donc :

$$\ell^2 = ab$$

mais puisque (m_n) et (h_n) sont à valeurs positives, $\ell \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\ell = \sqrt{ab}}$.

(b) A l'aide de la question précédente, on déduit que $m_nh_n = \ell^2$. Ainsi :

$$\boxed{m_{n+1} - \ell} = \frac{m_n + h_n}{2} - \ell = \frac{m_n^2 + h_nm_n}{2m_n} - \frac{2\ell m_n}{2m_n} = \frac{m_n^2 + \ell^2}{2m_n} - \frac{2\ell m_n}{2m_n}$$
$$= \boxed{\frac{(m_n - \ell)^2}{2m_n}}$$

3. (a)

```
def limite(a,b,N):
    m, h = a, b
    while abs(m-h) > 10**-N:
        m, h = (m+h)/2,  2*m*h/(m+h)
    return h, m
```

(b)

```
def test_limite(a,b,N):
    h, m = limite(a,b,N)
    lim = (a*b)**0.5
    return h <= lim <= m
```

Exercice 4

1. Un tirage correspond à une 5-combinaison de l'ensemble de toutes les boules donc $\boxed{\text{il y a } \binom{12}{5} \text{ tirages possibles.}}$
2. Il suffit de compléter les trois 1 par deux boules ne portant pas le numéro 1. $\boxed{\text{Il y a } \binom{9}{2} \text{ tirages contenant les trois numéros 1.}}$
3. Passons par le complémentaire. Il y a $\binom{7}{5}$ tirages sans boule rouge donc $\boxed{\text{Il y a } \binom{12}{5} - \binom{7}{5} \text{ tirages contenant au moins une boule rouge.}}$
4. On procède par étapes :
   1) On choisit les trois boules rouges : $\binom{5}{3}$ possibilités.
   2) On complète par des boules non rouges : $\binom{7}{2}$ possibilités.
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{5}{3}\binom{7}{2} \text{ tirages contenant exactement 3 boules rouges.}}$
5. $\boxed{\text{Il n'y a que 2 tirages monocolores.}}$

   Parmi les $\binom{7}{5}$ tirages sans boules rouges il y en a un seul monocolore donc il y a $\binom{7}{5} - 1$ tirages bicolores bleu-blanc.
   Parmi les $\binom{10}{5}$ tirages sans boules blanches il y en a deux monocolores donc il y a $\binom{10}{5} - 2$ tirages bicolores bleu-rouge.
   Parmi les $\binom{7}{5}$ tirages sans boules bleues il y en a un seul monocolore donc il y a $\binom{7}{5} - 1$ tirages bicolores blanc-rouge.
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{7}{5} - 1 + \binom{10}{5} - 2 + \binom{7}{5} - 1 = 2\binom{7}{5} + \binom{10}{5} - 4 \text{ tirages bicolores.}}$

   Il n'y a que trois types de tirages : monocolores, bicolores et tricolores donc
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{12}{5} - \left(2\binom{7}{5} + \binom{10}{5} - 4\right) - 2 \text{ tirages tricolores.}}$

Exercice 5. *Une suite implicite*

1. La fonction f_n étant une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} k^2x^{k-1} > 0.$$

   La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   De plus, $f_n(0) = 0 < 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} nx^n = +\infty$.

   D'après ce qui précède f_n réalise une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Comme $1 \in \mathbb{R}_+$,

   $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 1 \text{ admet bien une unique solution dans } \mathbb{R}_+\text{. On la note } x_n.}$

2. Calcul de x_1 : il s'agit de résoudre l'équation $x = 1$ sur $\mathbb{R}_+$; ainsi $\boxed{x_1 = 1}$.

   Calcul de x_2 : il s'agit de résoudre l'équation $x + 2x^2 = 1$ sur $\mathbb{R}^+$. Le discriminant du trinôme $2x^2 + x - 1$ est $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$. Donc il admet 2 racines réelles : $\frac{-1-3}{4} = -1 < 0$ et $\frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \geq 0$. Donc $\boxed{x_2 = \frac{1}{2}}$.

3. On a :

$$\boxed{f_{n+1}(x_n)} = \sum_{k=1}^{n+1} kx_n^k = \left(\sum_{k=1}^{n} kx_n^k\right) + (n+1)x_n^{n+1} = f_n(x_n) + (n+1)x_n^{n+1}$$
$$= \boxed{1 + (n+1)x_n^{n+1}}$$

En particulier $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1 \leq f_{n+1}(x_n)$. Puisque f_{n+1} est croissante, nécessairement $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est donc décroissante.
Puisque (x_n) est décroissante et minorée (par 0), d'après le théorème de la limite monotone la suite (x_n) est convergente.

4. On a montré (question 2) que $x_2 = \dfrac{1}{2}$ et que (question 3) (x_n) est décroissante.
On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $x_n \leq \dfrac{1}{2}$.
En particulier pour $n \geq 2$: $0 \leq x_n^n \leq \dfrac{1}{2^n}$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim(x_n)^n = 0}$.
De même, pour $n \geq 2$: $0 \leq nx_n^n \leq \dfrac{n}{2^n}$. Par croissance comparée $\lim_\infty \dfrac{n}{2^n} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim n(x_n)^n = 0}$.

5. La fonction F_n étant polynomiale, elle est dérivable, et $F_n'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. On en déduit que $\boxed{f_n(x) = xF_n'(x)}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$: par la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}}$$

7. Puisque $F_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$:

$$F_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1 - x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

et donc, puisque $f_n(x) = xF_n'(x)$:

$$f_n(x) = x \times \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

8. Puisque pour $n \geq 2$, $x_n \leq \dfrac{1}{2}$, on a bien $x_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Ainsi d'après la question 6 :

$$f_n(x_n) = x_n \times \frac{nx_n^{n+1} - (n+1)x_n^n + 1}{(1-x_n)^2} = 1$$
$$\Longrightarrow x_n \times \frac{nx_n^n \times x_n - nx_n^n - x_n^n + 1}{(1-x_n)^2} = 1$$

Par passage à la limite dans cette dernière relation, et puisque $\lim x_n^n = \lim nx_n^n = 0$ (question 4), en notant $\ell = \lim x_n$, on obtient la relation :

$$\ell \times \frac{0 \times \ell - 0 - 0 + 1}{(1-\ell)^2} = 1 \Longrightarrow \ell = (1-\ell)^2 \Longrightarrow \ell^2 - 3\ell + 1 = 0$$

Or le trinôme $x^2 - 3x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 10 - 4 = 5$ et pour racines $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Or puisque $x_n \leq \frac{1}{2} < 1$ dès que $n \geq 2$, nécessairement $\lim x_n \leq 1$. On en déduit $\boxed{\ell = \lim x_n = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$.