Exercice 1

L'expérience aléatoire consiste à tirer successivement et avec remise 4 boules dans une urne en contenant 10, dont 7 blanches et 3 noires. On numérote les boules de 1 à 10 et on note $\mathscr{U} = [\![1, 10]\!]$ l'ensemble de leur numéro, les sept blanches correspondant aux 7 premiers numéros. L'univers Ω est alors l'ensemble des listes de 4 éléments de $\mathscr{U}$. Ainsi :

$$\mathrm{card}(\Omega) = 10^4$$

Chaque tirage est équiprobable, puisque les boules sont tirées au hasard.

1. L'événement "obtenir 4 boules blanches" est $[\![1, 7]\!]^4$. Sa probabilité est donc :

$$\frac{7^4}{10^4} = \boxed{\left(\frac{7}{10}\right)^4}$$

L'événement "obtenir 4 boules noires" est $[\![8, 9]\!]^4$. Sa probabilité est donc :

$$\frac{3^4}{10^4} = \boxed{\left(\frac{3}{10}\right)^4}$$

2. L'événement "obtenir au moins une boule blanche" est contraire de "obtenir que des noires". Ainsi sa probabilité est :

$$\boxed{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^4}.$$

De même l'événement "obtenir au moins une boule noire" est contraire de "obtenir que des blanches". Ainsi sa probabilité est :

$$\boxed{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^4}.$$

3. Notons A l'évènement obtenir 2 boules noires suivies de 2 boules blanches. Puisque les boules blanches sont celles numérotées de 1 à 7, A est le produit cartésien $[[8, 10]] \times [[8, 10]] \times [[1, 7]] \times [[1, 7]]$ et donc $\mathrm{card(A)} = 3^2 \times 7^2$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \boxed{\frac{3^2 \times 7^2}{10^4}} =$$

4. Combien y-a-t-il de façons de tirer 2 blanches exactement, c'est à dire deux blanches et deux noires ? On choisit la position des 2 blanches, il y a autant de façons de faire que de combinaisons de 2 éléments parmi 4, soit $\binom{4}{2}$. Puis combien de façons de placer 2 boules blanches sur ces 2 emplacements : autant que de listes de 2 éléments parmi 7, soit 7^2. Et enfin combien de façons de placer 2 boules noires sur les 2 positions restantes : autant que de listes de 2 éléments parmi 3, soit 3^2. Ainsi en notant A l'évènement "on a tiré 2 boules blanches exactement", on obtient :

$$\mathrm{card}\,(A) = \binom{4}{2} \times 7^2 \times 3^2 = \frac{4!}{2!2!} \times 7^2 \times 3^2 = 2 \times 7^2 \times 3^3$$

Ainsi la probabilité $\mathbb{P}(A)$ de tirer 2 boules blanches exactement est :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}\,(A)}{\mathrm{card}\,(\Omega)} = \boxed{\frac{2 \times 7^2 \times 3^3}{10^4}}$$

5. Des boules alternées peuvent débuter par une blanche (bnbn) ou par une noire (nbnb). Ces deux événements étant incompatibles on va sommer leur probabilités. Dans chaque cas les positions des blanches et noires étant connues à l'avance, il suffit de choisir les 2 blanches et les 2 noires ; le nombre de possibilités pour ces choix est $7^2 \times 3^2$. La probabilité est donc :

$$\boxed{2 \times \frac{21^2}{10^4}}$$

6. Dans cette question, les tirage se faisant sans remise, on prend pour univers l'ensemble des 4-listes sans répétition dans $[\![1, 10]\!]$, toujours muni de la probabilté uniforme. Son cardinal est alors :

$$\frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

On reproduit le même raisonnement à chaque question, mais en changeant toutes les listes par des listes sans répétition :

3) 2 boules noires suivies de 2 boules blanches :

$$\boxed{\frac{(3 \times 2) \times (7 \times 6)}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{20}}$$

4) 2 boules blanches exactement : il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour la position des blanches :

$$\boxed{\frac{6 \times (7 \times 6) \times (3 \times 2)}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{3}{10}}$$

5) Des boules alternées :

$$\boxed{2 \times \frac{(7 \times 6) \times (3 \times 2)}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{10}}$$

Exercice 2

1. Calculs de limite.

   (a) $\dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $\frac{\pi}{4}$.

   On pose $h = x - \frac{\pi}{4} \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} &= \frac{\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h} \\
&= \frac{\sin h \cos \frac{\pi}{4} + \cos h \sin \frac{\pi}{4} - (\cos h \cos \frac{\pi}{4} - \sin h \sin \frac{\pi}{4})}{h} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sin h + \cos h - (\cos h - \sin h)}{h} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2 \sin h}{h} \\
&= \sqrt{2} \times \frac{\sin h}{h} \underset{0}{\longrightarrow} \boxed{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

   par produit des limites.

   (b) $\dfrac{\ln(1 + x^\alpha)}{\ln x}$ en $+\infty$ (où $\alpha > 0$).

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1 + x^\alpha)}{\ln x} &= \frac{\ln\left(x^\alpha \times (1 + x^{-\alpha})\right)}{\ln x} \\
&= \frac{\ln x^\alpha + \ln\left(1 + x^{-\alpha}\right)}{\ln x} \\
&= \underbrace{\frac{\alpha \ln x}{\ln x}}_{\underset{+\infty}{\longrightarrow} \alpha} + \underbrace{\frac{\ln\left(1 + x^{-\alpha}\right)}{\ln x}}_{\underset{+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\alpha}
\end{aligned}$$

   par somme des limites.

   (c) $\left(\dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$ en 0.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}\right)\right) \\
\left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{1 + x + x^2 - 2x}{1 + x + x^2}\right)\right) \\
\left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\underbrace{\frac{1}{x} \times \ln\left(1 - \frac{2x}{1 + x + x^2}\right)}_{\underset{0}{\sim} \frac{-2}{1 + x + x^2} \underset{0}{\longrightarrow} -2}\right) \\
&\underset{0}{\longrightarrow} \boxed{e^{-2}}
\end{aligned}$$

   par composition des limites.

2. Calcul d'équivalents.

   (a) $\ln(\cos x)$ en 0.

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{\underset{0}{\longrightarrow} 0}) \\
&\underset{0}{\sim} \cos x - 1 && \text{par substitution} \\
&\underset{0}{\sim} \boxed{-\frac{x^2}{2}} && \text{par produit}
\end{aligned}$$

   (b) $\dfrac{x^{x+1} - x}{\ln x}$ en 0^+.

$$\begin{aligned}
\frac{x^{x+1} - x}{\ln x} &= x \times \frac{x^x - 1}{\ln x} \\
&= x \times \frac{e^{x \ln x} - 1}{\ln x} \\
&\underset{0^+}{\sim} x \times \frac{x \ln x}{\ln x} && \text{par substitution car } x \ln x \underset{0^+}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{0^+}{\sim} \boxed{x^2} && \text{et par produit et quotient}
\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{\sqrt{x^4+2x^5\sin(x)}-x^2}{x^3}$ en 0.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^4+2x^5\sin(x)}-x^2}{x^3} &= \frac{x^2\times\left(\sqrt{1+2x\sin(x)}-1\right)}{x^3}\\ &\underset{0}{\sim} \frac{2x\sin(x)}{2x}\\ &\underset{0}{\sim} \boxed{\sin(x)}\end{aligned}$$

par produit, quotient et substitution, car $2x\sin(x)\underset{0}{\longrightarrow}0$.

Problème

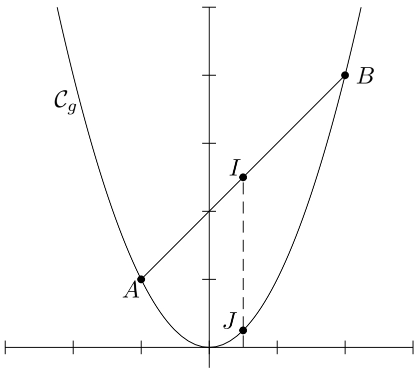
Partie I.

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; alors :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{g(x)+g(y)}{2} &\iff \frac{(x+y)^2}{4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\\ \iff x^2+y^2+2xy\leqslant 2x^2+2y^2 &\iff 0\leqslant x^2+y^2-2xy\\ \iff 0\leqslant (x-y)^2 &\quad \text{vrai puisqu'un carré de réels est toujours positif}\end{aligned}$$

Ainsi g vérifie $(*)$.

2. Les coordonnées du milieu de $[A,B]$ sont $(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$.
3. Voir le graphique ci-contre.
4. L'interprétation géométrique de $(*)$ est : une fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifie $(*)$ si et seulement si pour tout couple de points $A(a,g(a))$ et $B(b,g(b))$ situés sur la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g, le point de $\mathcal{C}_g$ d'abcisse $\frac{a+b}{2}$ est situé au dessous du milieu du segment $[A,B]$.



Partie II.

1. (a) Puisque f est une fonction monotone, elle admet en tout point une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche finie.

   (b) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $x\leqslant a$. Puisque f est croissante $f(x)\leqslant f(a)$. D'après la question précédente f admet une limite à gauche en a, en passant à la limite en a dans l'inégalité, on obtient : $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\leqslant f(a)$. De même soit $a\leqslant x$, on a $f(a)\leqslant f(x)$, et par passage à la limite en a : $f(a)\leqslant\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$.

2. (a) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. On applique la propriété $(*)$ avec $x=a$ et $y=a+u_n$; on obtient $f\left(a+\dfrac{u_n}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+a+u_n}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(a)+f(a+u_n)}{2}$ qui donne l'inégalité recherchée.

   (b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0^+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a+\dfrac{u_n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}(a+u_n)=a^+$. D'autre part f admet une limite finie ℓ à droite en a (question 1.a).
   On applique deux fois le théorème de composition des limites pour le calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a+u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(a+\dfrac{u_n}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}(a+u_n)=a^+\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\ell\end{array}\right\}\implies\lim_{n\to+\infty}f(a+u_n)=\ell.$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a+\dfrac{u_n}{2}\right)=a^+\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\ell\end{array}\right\}\implies\lim_{n\to+\infty}f\left(a+\frac{u_n}{2}\right)=\ell.$$

   Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}f(a+u_n)=\lim_{n\to+\infty}f\left(a+\frac{u_n}{2}\right)=\lim_{x\to a^+}f(x)}$$

   On fait ensuite tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité établie dans la question précédente ; $f(a+u_n)$ et $f\left(a+\dfrac{u_n}{2}\right)$ tendent vers le réel $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ et on obtient l'inégalité :

$$\lim_{x\to a^+}f(x)\leqslant\frac{f(a)+\lim\limits_{x\to a^+}f(x)}{2}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}&\frac{\lim\limits_{x\to a^+}f(x)}{2}\leqslant\frac{f(a)}{2}\\ \implies&\lim_{x\to a^+}f(x)\leqslant f(a)\end{aligned}$$

Puisque par ailleurs $f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$ (d'après 1.b)) on a ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}.$$

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On applique ici encore $(*)$ avec $x = a - u_n$ et $y = a + u_n$, on obtient : $f(a) = f\left(\dfrac{a-u_n+a+u_n}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a-u_n)+f(a+u_n)}{2}$ qui donne l'inégalité recherchée.

(d) Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ on a $\lim_{n\to+\infty}(a-u_n) = a^-$.
Par ailleurs f admet une limite à gauche finie ℓ en a (question 1.a). On applique le théorème de composition des limites :

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to+\infty}(a-u_n) = a^- \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a-u_n) = \ell.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a-u_n) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

On sait d'autre part (question 2.b) que $\lim_{n\to+\infty} f(a+u_n) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente on obtient l'inégalité :

$$f(a) \leqslant \frac{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) + \lim\limits_{x\to a^+} f(x)}{2}$$

puisque $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (d'après 2.b)), on en déduit que :

$$\begin{aligned} & f(a) \leqslant \frac{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) + f(a)}{2} \\ \Longrightarrow\ & \frac{f(a)}{2} \leqslant \frac{\lim\limits_{x\to a^-} f(x)}{2} \\ \Longrightarrow\ & \boxed{f(a) \leqslant \lim_{x\to a^-} f(x)}. \end{aligned}$$

(e) Avec 1.b) $\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a)$, et avec 2.d) $f(a) \leqslant \lim_{x\to a^-} f(x)$. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)}.$$

Avec 2.b) on a donc :

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$$

Donc f a une limite en a égale à $f(a)$. Cela est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie III.

1. On suppose f majorée.

(a) D'après le Théorème de la limite monotone, puisque f est croissante, elle admet une limite en $+\infty$, et puisque f est majorée cette limite est finie égale à $L = \text{Sup } f = \sup\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

(b) On particularise $(*)$ avec $y = 0$, pour obtenir :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(0)}{2}$$

Puisque f a pour limite L en $+\infty$, en faisant tendre dans cette inégalité x vers $+\infty$ on obtient : $L \leqslant \dfrac{L+f(0)}{2}$ dont on déduit $\boxed{L \leqslant f(0)}$.

(c) D'après 1.a) L est un majorant de $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$, en particulier $f(0) \leqslant L$. Avec 1.b) on obtient donc $L = f(0)$.

(d) On traite successivement les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
– Si $x \geqslant 0$ alors puisque f est croissante $f(x) \geqslant f(0)$. Par ailleurs puisque L est un majorant de $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$, on a :

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant L = f(0)$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = f(0)$.
–Si $x < 0$ montrons par l'absurde que $f(x) = f(0)$. Supposons donc que $f(x) \neq 0$. Puisque f est croissante, $f(x) < f(0)$. Appliquons $(*)$ à x et $y = -x > 0$. On a donc :

$$f(0) = f\left(\frac{x+(-x)}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

Mais d'une part on a supposé que $f(x) < f(0)$ et d'autre part puisque $-x > 0$ d'après le cas précédent $f(-x) = f(0)$. Donc on obtient :

$$f(0) \leqslant \frac{f(x)+f(-x)}{2} < \frac{f(0)+f(0)}{2} = f(0)$$

et donc $f(0) < f(0)$ ce qui est contradictoire. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$: f est constante.

2. Si f n'est pas constante, d'après 1.d) f n'est pas majorée. D'après le Théorème de la limite monotone, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

3. La fonction exp est strictement croissante, elle est donc croissante et non constante. Montrons que exp vérifie la relation $(*)$: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\exp\left(\frac{x+y}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{y}{2}\right)$$

Montrons que $e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{y}{2}} \leqslant \dfrac{e^x + e^y}{2}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{y}{2}} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2} &\iff 2 \times e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{y}{2}} \leqslant e^x + e^y \\ &\iff e^x + e^y - 2 \times e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{y}{2}} \geqslant 0 \\ &\iff \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(e^{\frac{y}{2}}\right)^2 - 2 \times e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{y}{2}} \geqslant 0 \\ &\iff \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{y}{2}}\right)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui est évidemment vrai. Ainsi :

$$\exp\left(\frac{x+y}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{y}{2}\right) \leqslant \frac{\exp(x) + \exp(y)}{2}$$

La fonction exp vérifie donc $(*)$. On retrouve alors sa limite en $+\infty$: $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$.