

Exercice 1.

1) On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_1\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi - 4\left(\frac{\pi}{4} + h\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos h - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin h - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-4h} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \times \frac{\cos h - \sin h - 1}{h} \end{aligned}$$

Par somme de DLs :

$$\cos h - \sin h - 1 \underset{0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} - (h - \frac{h^3}{6}) - 1 + o(h^4)$$

$$\cos h - \sin h - 1 \underset{0}{=} -h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)$$

et donc :

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &\underset{0}{=} -\frac{\sqrt{2}}{8} \times \left(-1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right) + o(h^3) \\ &\underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16}h - \frac{\sqrt{2}}{48}h^2 - \frac{\sqrt{2}}{192}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

et donc :

$$f_1(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} \times \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{48} \times \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{192} \times \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

2) On procède par composition :

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 + (\cos(x) - 1)}$$

Or :

$$\text{puisque : } \cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{et : } \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{par composition : } \Rightarrow \sqrt{\cos(x)} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{0}{=} x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{puisque : } \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \text{par composition : } \ln(1 + (x + \sqrt{\cos(x)} - 1)) &\underset{0}{=} \text{Tronc}_3 \left(\left(x - \frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{4}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{4}\right)^3 \right) + o(x^3) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ln(x + \sqrt{\cos x}) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\boxed{\ln(x + \sqrt{\cos x}) \underset{0}{=} x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{12}x^3 + o(x^3)}$$

3) On $h = \frac{1}{x}$;

$$\begin{aligned} f_4(x) = f_4\left(\frac{1}{h}\right) &= \sqrt[3]{\frac{1/h^2 + 1/h + 1}{1/h^2 + 1}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1 + h + h^2}{1 + h^2}} \\ &= \sqrt[3]{1 + \frac{h}{1 + h^2}} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+h} &= 1 - h + o(h) \\ \Rightarrow \frac{1}{1+h^2} &= 1 + o(h) \\ \Rightarrow \frac{h}{1+h^2} &= h + o(h^2)\end{aligned}$$

Et par composition :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{1+\frac{h}{1+h^2}} &= 1 + \frac{1}{3}h - \frac{1}{9}h^2 + o(h^2)\end{aligned}$$

Dnc :

$$\boxed{f_4(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

5) On effectue un $DL(0)$ à un ordre suffisant : 3.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \Rightarrow f_5(x) &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f_5(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3}$$

6) Pour le prolongement par continuité il faut un $DL_0(1)$ et pour étudier localement la courbe (tangente plus position relative) il faut au moins un $DL_2(1)$.

On pose $x = 1 + h$:

$$f_6(x) = f_6(1+h) = \frac{1 - \sqrt{1+2h+h^2+2+2h-2}}{h} = \frac{1 - \sqrt{1+4h+h^2}}{h}$$

Par composition :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3) \\ \Rightarrow \sqrt{1+4h+h^2} &= \text{Tronc}_3 \left(1 + \frac{1}{2}(4h+h^2) - \frac{1}{8}(4h+h^2)^2 + \frac{1}{16}(4h+h^2)^3 \right) + o(h^3) \\ &= 1 + (2h + \frac{h^2}{2}) - \frac{1}{8}(16h^2 + 8h^3) + \frac{1}{16}(64h^3) + o(h^3) \\ &= 1 + 2h - \frac{3}{2}h^2 + 3h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}f_6(1+h) &= -2 + \frac{3}{2}h - 3h^2 + o(h^2) \\ f_6(x) &= -2 + \frac{3}{2}(x-1) - 3(x-1)^2 + o((x-1)^2)\end{aligned}$$

Ainsi :

– f_6 se prolonge par continuité en 1 en posant $f_6(1) = -2$.
– Sa courbe a pour tangente au point d'abscisse 1, la droite d'équation :

$$y = -2 + \frac{3}{2}(x-1)$$

– La courbe reste au-dessous de sa tangente dans un voisinage du point d'abscisse 1.

7.a) On considère le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$ que l'on primitive :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + o(x) \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + o(x^2) \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi la courbe de arctan a pour tangente à l'origine $y = x$; elle est au-dessus de sa tangente à gauche, et passe au-dessous à droite sur un voisinage.

7.b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan x + \arctan 1/x = \text{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}$$

On pose $h = 1/x \rightarrow 0^+$:

$$\arctan x = \arctan 1/h = \frac{\pi}{2} - \arctan h \underset{0^+}{=} \frac{\pi}{2} - h + o(h)$$

Ainsi :

$$\arctan x \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(1/x)$$

La courbe de $\arctan$ admet donc une asymptôte horizontale au voisinage de $+\infty$: $y = \frac{\pi}{2}$ et reste au-dessous de son asymptôte au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

2 et 3) $DL_2(+\infty)$ de $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \exp\left(x \ln \frac{x}{1+x}\right)$.

On pose $h = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{h}\right) = \exp\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1/h}{1+1/h}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{1+h}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{h} \ln(1+h)\right) \end{aligned}$$

On considère le $DL_3(0^+)$ de $\ln(1+h)$:

$$\ln(1+h) \underset{0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$$

pour en déduire par produit le $DL_2(0)$ de $-\frac{1}{h} \ln(1+h)$:

$$-\frac{1}{h} \ln(1+h) \underset{0}{=} -1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + o(h^2)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &\underset{0}{=} \exp\left(-1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right) \\ &\underset{0}{=} e^{-1} \times \underbrace{\exp\left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

On compose alors avec le $DL_2(0)$ de $\exp$: $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\frac{1}{h}\right) &\underset{0}{=} e^{-1} \times \left(1 + \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3}\right)^2\right) + o(h^2) \\ &\underset{0}{=} e^{-1} \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{h^2}{4}\right) + o(h^2) \\ &\underset{0}{=} e^{-1} \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{5h^2}{24}\right) + o(h^2) \end{aligned}$$

C'est le $DL_2(0)$ de $f\left(\frac{1}{h}\right)$; on en déduit les $DL_2(\pm\infty)$ de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{e} + \frac{1}{2ex} - \frac{5}{24ex^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ f(x) &\underset{-\infty}{=} \frac{1}{e} + \frac{1}{2ex} - \frac{5}{24ex^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Donc la courbe de f admet pour asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ la droite horizontale $y = \frac{1}{e}$. Elle est au dessus de son asymptôte au voisinage de $+\infty$. Elle est au dessous de son asymptôte au voisinage de $-\infty$. il n'était pas nécessaire d'aller à l'ordre 2 ; l'ordre 1 aurait suffi.

Exercice 4.

1) $\exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x)\right)$ est défini pour $x \neq 0$ et $\sin(x) \neq -1$; en particulier sur $] -\pi/2; 0[\cup]0; \pi/2[$. En tant que composées et produit d'application $\mathcal{C}^\infty$ elle y est $\mathcal{C}^\infty$.

2) On considère les $DL_3(0)$ de $1 + \sin(x)$ et $\ln(1 + u)$:

$$1 + \sin(x) \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1 + u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

pour obtenir par composition le $DL_3(0)$ de $\ln(1 + \sin x)$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin(x)) &\underset{0}{=} \ln \left(1 + x - \underbrace{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{2} \times x^2 + \frac{1}{3} \times x^3 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

puis le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x)$:

$$\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

ensuite, par composition avec le $DL_2(0)$ de $\exp$: $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x) \right) &\underset{0}{=} \exp \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ &\underset{0}{=} e \times \exp \left(\underbrace{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &\underset{0}{=} e \times \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right)^2 \right) + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} e \times \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{4} \right) + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

En particulier $\lim_0 \exp \left(\frac{1}{x} \ln(1 + \sin x) \right) = e$.

Pour que f soit continue en 0 il faut donc poser $f(0) = \lambda = e$. Pour cette valeur f admet le $DL_2(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 + o(x^2)$$

et admet donc aussi un $DL_1(0)$; elle est donc dérivable en 0, de nombre dérivée :

$$f'(0) = -\frac{e}{2}.$$

3) Le $DL_2(0)$ de $f(x)$ (pour $\lambda = e$) donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 et la position relative avec la courbe au voisinage du point.

$$\text{tangente en } x = 0 : \quad y = e - \frac{e}{2}x$$

la courbe reste au-dessus de la tangente au voisinage du point d'abscisse 0.