Exercice 1.

1. $f(x) = e^x \ln(\sin(x))$; commençons par déterminer $\mathscr{D}_f$: $f(x)$ est défini si et seulement si :

$$\sin(x) > 0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[\implies \mathscr{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

Sur $\mathscr{D}_f$, f est dérivable car $x \longmapsto \ln(\sin(x))$ est dérivable (par composition) et $f : x \longmapsto e^x \ln(\sin(x))$ est dérivable (par produit). Aisi $\mathscr{D}_f$ est aussi le domaine de dérivabilité de f.
Calcul de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \ln(\sin(x)) + e^x \times \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= e^x \times (\ln(\sin(x)) + \text{cotan}(x)) \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^{\tan(x)} = \exp(\tan(x)\ln x)$; $f(x)$ est définie si et seulement si $\tan(x)$ est défini et $x > 0$:

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[= \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

et dérivable sur son domaine de définition comme composée d'un produit de fonctions dérivables et de exp. Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan(x)\ln(x))' \times \exp(\tan(x)\ln x) \\ &= \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x}\right) \times \exp(\tan(x)\ln x) \\ &= \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x}\right) \times x^{\tan(x)} \end{aligned}$$

3. L'expression : $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi - 2x}}$ est définie si et seulement si

$$\pi - 2x > 0 \iff x < \frac{\pi}{2} \implies \mathscr{D}_f = \left]-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$$

puisque $f(\pi/2) = 0$ est défini. De puisque $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée puis quotient, f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{\pi}{2}\right[$; f est-elle dérivable en $\frac{\pi}{2}$?
Étudions la limite du taux d'accroissement en $\frac{\pi}{2}$:

$$T_{\frac{\pi}{2}}f(x) \underset{x\neq\frac{\pi}{2}}{=} \frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi - 2x}} - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi - 2x} \times (x - \frac{\pi}{2})}$$

dont la limite présente une forme indéterminé de type "$\frac{0}{0}$" en $\frac{\pi}{2}$. POur la lever : on peut poser $h = x - \frac{\pi}{2} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} 0^-$:

$$\begin{aligned} T_{\frac{\pi}{2}}f\left(h + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{-2h} \times h} \\ &= \frac{\cos h \cos \frac{\pi}{2} - \sin h \sin \frac{\pi}{2}}{\sqrt{-2h} \times h} \\ &= \frac{-\sin h}{\sqrt{-2h} \times h} \\ &\underset{0^-}{\sim} \frac{-1}{\sqrt{-2h}} \underset{0^-}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$

Ainsi f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.
Calculons la limite de f (sur $\left]-\infty; \frac{\pi}{2}\right[$) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)\sqrt{\pi - 2x} - \cos(x)\dfrac{-2}{2\sqrt{\pi - 2x}}}{\pi - 2x} \\ &= \frac{\dfrac{-\sin(x)(\pi - 2x) + \cos(x)}{\sqrt{\pi - 2x}}}{\pi - 2x} \\ &= \frac{\cos(x) - \sin(x)(\pi - 2x)}{\sqrt{\pi - 2x} \times (\pi - 2x)} \\ &= \frac{\cos(x) - \sin(x)(\pi - 2x)}{(\pi - 2x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soit $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$; $f(x)$ est défini si et seulement si :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \neq 0 &\iff x > -1 \text{ et } x \neq 0 \iff x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ &\implies \mathscr{D}_f =]-1; 0[\cup]0; +\infty[\end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme quotient d'applications dérivables et :

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{h(x)}{(\ln(1+x))^2}$$

$f'(x)$ a même signe que $h(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \ln(1+x) - 1 + \dfrac{1}{1+x}$; étudions son signe ; pour cela on dérivé h (qui est dérivable sur $\mathscr{D}_f$) :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Ainsi h est strictement décroissante sur $]-1;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle atteint donc son minimum en 0 : $h(0) = -1+1 = 0$. Donc $h(x)$ est strictement positive sur $\mathscr{D}_f$

Calculons les limites aux bornes de f :

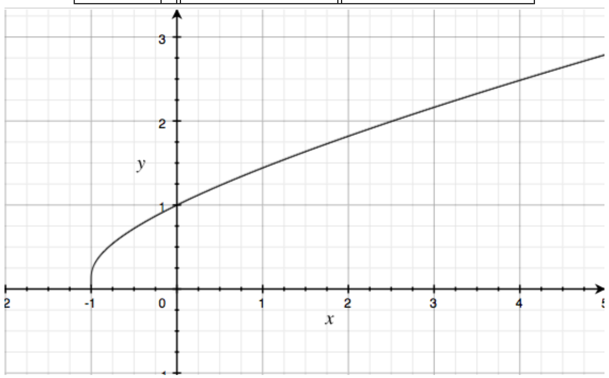
$$\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} 1$$

$$\lim_{-1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} = 0^+$$

$$\lim_{+\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{+\infty} \frac{x}{\ln x} \times \frac{1}{1+\ln(1+\frac{1}{x})} = +\infty \quad \text{par CC}$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et :

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	||	0^- ↗ 1	||	1 ↗ $+\infty$	



2. $f(x) = xe^{\frac{x-1}{x+1}}$; $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ en tant que produit de composées d'applications dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x-1}{x+1}} + xe^{\frac{x-1}{x+1}} \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= e^{\frac{x-1}{x+1}} + xe^{\frac{x-1}{x+1}} \times \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= e^{\frac{x-1}{x+1}} \times \underbrace{\left(1 + \frac{2x}{(x+1)^2}\right)}_{h(x)} \end{aligned}$$

ainsi $f'(x)$ a même signe que $h(x) = 1 + \dfrac{2x}{(x+1)^2}$. Soit $x \neq -1$:

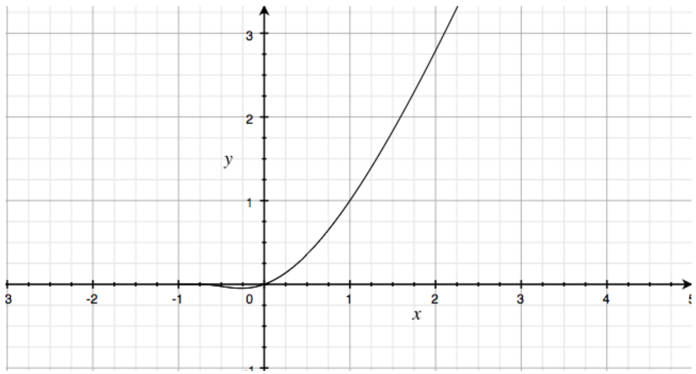
$$\begin{aligned} 1 + \frac{2x}{(x+1)^2} \geqslant 0 &\underset{x\neq -1}{\iff} (x+1)^2 + 2x \geqslant 0 \iff x^2+4x+1 \geqslant 0 \\ &\iff x \in]-\infty; -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}; +\infty[\end{aligned}$$

Les limites aux bornes de f sont obtenues sans grandes difficultés ; on obtient le tableau de variation :

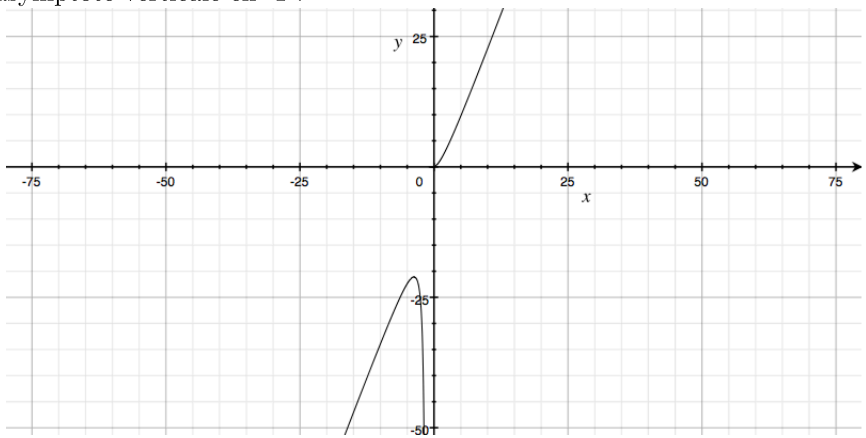
x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$ || 0	↘	β	↗	$+\infty$

où

$$\alpha = (-2-\sqrt{3}) \exp \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \quad ; \quad \beta = (-2+\sqrt{3}) \exp \frac{-3+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$$



On remarque que le logiciel de tracé nous donne à première vue une idée fausse du tracé de la courbe ; en zoomant on obtient une allure correcte : il y a une asymptôte verticale en -1 :



Exercice 3.
L'expression est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$; on la dérive :

$$(\arctan x + \arctan \frac{1}{x})' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi l'expression est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ ainsi que sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais attention pas sur $\mathbb{R}^*$! Le résultat attendu n'est vrai que sur un intervalle).

– Sur $\mathbb{R}_+^*$ elle est constante égale à $\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

– Sur $\mathbb{R}_-^*$ elle est constante égale à $\arctan(-1) + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Exercice 5. On a :

$$\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant g'(x)$$

$$\iff \boxed{\forall x \in]a,b[, -g'(x) \underset{(2)}{\leqslant} f'(x) \underset{(1)}{\leqslant} g'(x)}$$

Il nous faut prouver que :

$$-|g(b) - g(a)| \leqslant f(b) - f(a) \leqslant |g(b) - g(a)|$$

puisque $\forall x \in]a,b[, g'(x) \geqslant |f'(x)| \geqslant 0$, g est croissante sur $[a,b]$, et donc :

$$\iff -(g(b) - g(a)) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant g(b) - g(a)$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} (g-f)(b) - (g-f)(a) \geqslant 0 \\ (g+f)(b) - (g+f)(a) \geqslant 0 \end{cases}}$$

On applique deux fois le théorème des accroissements finis :
• $(g-f)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ donc il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$(g-f)(b) - (g-f)(a) = (g-f)'(c) \times (b-a)$$

Or d'après l'inégalité (1) $\forall x \in]a,b[$, $(g-f)'(x) = g'(x) - f'(x) \geqslant 0$, donc :

$$(g-f)(b) - (g-f)(a) = \underbrace{(g-f)'(c)}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(b-a)}_{>0} \geqslant 0 \implies \boxed{(g-f)(b) - (g-f)(a) \geqslant 0}$$

• $(g+f)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ donc il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$(g+f)(b) - (g+f)(a) = (g+f)'(c) \times (b-a)$$

Or d'après l'inégalité (2) $\forall x \in]a,b[$, $(g+f)'(x) = g'(x) + f'(x) \geqslant 0$, donc :

$$(g+f)(b) - (g+f)(a) = \underbrace{(g+f)'(c)}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(b-a)}_{>0} \geqslant 0 \implies \boxed{(g+f)(b) - (g+f)(a) \geqslant 0}$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{-|g(b)-g(a)| \leqslant f(b)-f(a) \leqslant |g(b)-g(a)|}$$

Exercice 6.
On remarque d'abord que :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

Ensuite :

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x}\right)''=\frac{2}{x^3} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{[3]}=-\frac{6}{x^4}$$

$$\left(\frac{1}{(x+1)}\right)'=-\frac{1}{(x+1)^2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{(x+1)}\right)''=\frac{2}{(x+1)^3} \quad ; \quad \left(\frac{1}{(x+1)}\right)^{[3]}=-\frac{6}{(x+1)^4}$$

On conjecture donc que :

$$f^{[n]}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}=(-1)^n\times n!\times\left(\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

Prouvons le par récurrence sur n.

(I) Pour $n=0$ on obtient $f^{[0]}(x)=f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ qui est vrai.

(H) Supposons que pour un entier $n\in\mathbb{N}$ on ait :

$$f^{[n]}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
f^{[n+1]}(x) &= {f^{[n]}}'(x)\\
&\underset{HR}{=}\left((-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}\right)'\\
&=\left((-1)^n\times n!\times x^{-(n+1)}-(-1)^n\times n!\times(x+1)^{-(n+1)}\right)'\\
&=-(n+1)\times(-1)^n\times n!\times x^{-(n+2)}+(n+1)\times(-1)^n\times n!\times(x+1)^{-(n+2)}\\
&=(-1)^{n+1}\times\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}-(-1)^{n+1}\times\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}
\end{aligned}$$

puisque : $-(-1)^n=(-1)^{n+1}$ et $(n+1)\times n!=(n+1)!$. Ainsi l'assertion reste vraie au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{f^{[n]}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}}.$$

Exercice 7.
1) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée d'applications C^∞ (une fraction rationnelle suivie de exp). En particulier elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Montrons qu'elle est aussi continue en 0 ; par limite d'une composée :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{1}{x^2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0\end{array}\right\}\implies \lim_{x\to0}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0=f(0)$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$; f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2) Procédons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.

(I) Pour $k=0$: $f^{[0]}(x)=f(x)=\dfrac{1}{x^{3\times0}}f(x)$. Ainsi la propriété est vraie au rang 0 avec $P_0=1$.

(H) Supposons pour $k\in\mathbb{N}$ fixé que $f^{[k]}(x)=\dfrac{P_k(x)}{x^{3\times k}}f(x)$ avec $P_k\in\mathbb{R}[X]$. Puisque $f^{[}k]$ est le produit d'une fraction rationnelle par f, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $\forall x\neq0$:

$$\begin{aligned}
f^{[k+1]}(x) &= \frac{P_k'(x)\times x^{3k}-P_k(x)\times 3k\times x^{3k-1}}{x^{6k}}\times f(x)+\frac{P_k(x)}{x^{3k}}f'(x)\\
&=\frac{P_k'(x)\times x^{3k}-P_k(x)\times 3k\times x^{3k-1}}{x^{6k}}\times f(x)+\frac{P_k(x)}{x^{3k}}\times\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\\
&=\frac{x^{3k-3}\times\left(P_k'(x)\times x^3-P_k(x)\times 3k\times x^2\right)}{x^{6k}}\times f(x)+\frac{2P_k(x)}{x^{3(k+1)}}\times f(x)\\
&=\frac{P_k'(x)\times x^3-P_k(x)\times 3k\times x^2}{x^{3(k+1)}}\times f(x)+\frac{2P_k(x)}{x^{3(k+1)}}\times f(x)\\
&=\frac{P_k'(x)\times x^3-P_k(x)\times 3k\times x^2+2P_k(x)}{x^{3(k+1)}}\times f(x)
\end{aligned}$$

En posant $P_{k+1}(x) = P_k'(x) \times x^3 - P_k(x) \times 3k \times x^2 + 2P_k(x)$ qui est un polynôme, comme somme de produits de polynômes, l'hypothèse de récurrence reste vraie au rang $k+1$.
On conclut avec le principe de récurrence.

3) Il s'agit de montrer que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $f^{[k]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f^{[k]}(0) = 0$.

(I) Pour $k = 0$, l'hypothèse est vraie.

(H) Supposons l'hypothèse vraie au rang $k \in \mathbb{N}$. Bien sûr $f^{[k]}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (car f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$) ; étudions sa dérivabilité en 0.

$$\begin{aligned}
T_0 f^{[k]}(x) = \frac{f^{[k]}(x) - f^{[k]}(0)}{x - 0} &\underset{HR}{=} \frac{f^{[k]}(x)}{x} \\
&\underset{(2)}{=} P_k(x) \times \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^{3k+1}} \\
&= \underbrace{P_k(x)}_{\underset{0}{\rightarrow} P_k(0)} \times e^{\frac{-1}{x^2}} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3k+1}{2}}
\end{aligned}$$

Or par croissance comparée :

$$e^{\frac{-1}{x^2}} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3k+1}{2}} = 0$$

en appliquant $\lim\limits_{X \to +\infty} X^\alpha e^{-X} = 0$ avec ici $X = \dfrac{1}{x^2}$ et $\alpha = \frac{3k+1}{2}$.
Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} T_0 f^{[k]}(x) = 0$$

Donc $f^{[k]}$ est dérivable en 0 et $f^{[k+1]}(0) = 0$. L'assertion reste donc vraie au rang $k+1$.
D'après le principe de récurrence, il découle que f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.