Exercice 2. On suppose les boules numérotées de 1 à 15 (où par exemple les blanches ont pour numéro 1,..,5, et les noires 6,...,15) de sorte à pouvoir les discerner.

1.a) On prend comme univers l'ensemble des couples d'entiers entre 1 et 15 : $\Omega = [\![1, 15]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme.
L'événement A : "une blanche suivie d'une noire" est donc : $A = [\![1, 5]\!] \times [\![6, 15]\!]$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{5 \times 10}{15^2} = \boxed{\frac{2}{9}}.$$

1.b) Sur le même univers, l'événement "une blanche et une noire dans n'importe quel ordre" s'écrit : $A = ([\![1, 5]\!] \times [\![6, 15]\!]) \cup ([\![6, 15]\!] \times [\![1, 5]\!])$. C'est une réunion de deux événements incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}([\![6, 15]\!] \times [\![1, 5]\!]) = \boxed{\frac{4}{9}}$$

2.a) Les tirages se faisant sans remise, l'univers est l'ensemble des couples sans répétition, muni de la probabilité uniforme. Avec les mêmes notations :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{5 \times 10}{\frac{15!}{13!}} = \frac{5 \times 10}{15 \times 14} = \boxed{\frac{5}{21}}.$$

2.b) *Première méthode.* Avec le même espace probabilisé :

$$\mathbb{P}(B) = 2 \times \mathbb{P}(A) = \boxed{\frac{10}{21}}$$

Deuxième méthode. Le tirage se faisant sans remise, on peut ici prendre pour univers l'ensemble des 2-combinaisons dans $[\![1, 15]\!]$. L'événement B est alors l'ensemble des 2-combinaisons avec un élément dans $[\![1, 5]\!]$ et l'autre dans $[\![6, 15]\!]$ donc $\operatorname{card} B = 5 \times 10$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\operatorname{card} B}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{5 \times 10}{\binom{15}{2}} = \frac{5 \times 10}{\frac{15!}{2!13!}} = \frac{5 \times 10 \times 2}{15 \times 14} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

3) On prend pour univers l'ensemble des 5-combinaisons dans $[\![1, 15]\!]$ muni de la probabilité uniforme. L'événement C : "obtenir 2 blanches et 3 noires" a pour cardinal : $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(C) = \boxed{\frac{\binom{5}{2} \times \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}}}$$

Exercice 3. Soit P_i, Q_i les événement "atteindre la cible à 20m (resp. 50m) au i-ème tir. On souhaite comparer les probabilités de $(P_1 \cap Q_2) \cup (\overline{P_1} \cap Q_2 \cap P_3)$ et $(Q_1 \cap P_2) \cup (\overline{Q_1} \cap P_2 \cap P_3)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((P_1 \cap Q_2) \cup (\overline{P_1} \cap Q_2 \cap P_3)) \\
=&\mathbb{P}(P_1 \cap Q_2) + \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap Q_2 \cap P_3) && \text{par incompatibilité} \\
=&pq + (1-p)qp && \text{par indépendance des tirs} \\
=&pq(2-p)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((Q_1 \cap P_2) \cup (\overline{Q_1} \cap P_2 \cap Q_3)) \\
=&\mathbb{P}(Q_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(\overline{Q_1} \cap P_2 \cap Q_3) && \text{par incompatibilité} \\
=&pq + (1-q)qp && \text{par indépendance des tirs} \\
=&pq(2-q)
\end{aligned}$$

(ce qu'il aurait été plus malin de déduire sans calcul du précédent par un argument de symétrie...)
Puisque $q < p$, $2 - p < 2 - q$ et donc il vaut mieux commencer par la deuxième cible.

A première vue ça peut semble paradoxal puisqu'on choisit de tirer deux fois sur la cible la plus lointaine et une seule fois sur la plus proche. Mais bien sûr c'est une idée fausse : car pour gagner il faudra atteindre une fois chaque cible, en atteignant nécessairement la 2ème cible tandis qu'on aura deux essais pour atteindre l'autre cible. Donc il vaut mieux placer la cible la plus facile en deuxième position et se laisser deux tentatives pour la plus difficile.

Exercice 4.
Notons F_i, P_i les événements "obtenir face (resp. pile) au i-ème lancer". Bien sûr $P_i = \overline{F_i}$.
Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement :

$$\begin{aligned}
E &= (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup \cdots \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \\
&= \bigcup_{k=0}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{n} F_i \right)
\end{aligned}$$

Par incompatibilité :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{n} F_i \right) \right)$$

Par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} q^k \times p^{n-k} = p^n \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

Si $\frac{q}{p} \neq 1$:

$$\mathbb{P}(E) = p^n \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\frac{q}{p}} = p^{n+1} \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{p-q} = \boxed{\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}}$$

(que l'on aurait pu obtenir plus rapidement grâce à l'identité remarquable : $p^{n+1}-q^{n+1} = (p-q) \times \sum_{k=0}^{n} q^k \times p^{n-k}$...).

Si $p = q = \dfrac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} q^k \times p^{n-k} = \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{n+1}{2^n}}$$

Exercice 5.
Notons A_k : "Lors du tirage des n boules, seule la k-ème boule tirée est blanche".
Notons A : "Lors du tirage des n boules, seulement une boule tirée est blanche".
Ainsi :

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

et de plus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles ; ainsi :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

On souhaite calculer $\mathbb{P}(A)$. Pour cela calculons $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$.

Notons les événements :
B_i : "la i-ième boule tirée est blanche".
R_i : "la i-ième boule tirée est rouge".

Alors $R_i = \overline{B_i}$.

$$\begin{aligned} A_k &= \text{"}r \cdots r \underset{k^{eme}}{\underset{\uparrow}{b}} r \cdots r\text{"} && \text{schématiquement} \\ &= \underbrace{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}} \cap B_k \cap \underbrace{R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n} && \text{mathématiquement} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i \cap B_k \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} R_i \end{aligned}$$

(lorsque $k = 1$ ou n l'une des deux grandes intersections disparait).

On applique la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) = {} & \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}) \times \mathbb{P}(B_k/(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1})) \\ & \times \mathbb{P}((R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n)/(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k)) \end{aligned}$$

Le tirage des rouges se faisant avec remise :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}) = \frac{r}{b+r} \times \cdots \times \frac{r}{b+r} = \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1}$$

et :

$$\mathbb{P}(B_k/(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1})) = \frac{b}{b+r}$$

Le tirage d'une blanche se faisant sans remise, sachant $(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k)$ il ne reste dans l'urne que $b-1$ boules blanches et r boules rouges, donc :

$$\mathbb{P}((R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n)/(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k)) = \frac{r}{b-1+r} \times \cdots \times \frac{r}{b-1+r} = \left(\frac{r}{b-1+r}\right)^{n-k}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1} \times \frac{b}{b+r} \times \left(\frac{r}{b-1+r}\right)^{n-k} = \frac{br^{n-1}}{(b+r)^k(b-1+r)^{n-k}}$$

Il reste à calculer $\mathbb{P}(A)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{br^{n-1}}{(b+r)^k(b-1+r)^{n-k}} \\
&= \frac{br^{n-1}}{(b-1+r)^n} \times \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-1+r}{b+r}\right)^k
\end{aligned}$$

puisque $\dfrac{b-1+r}{b+r} \neq 1$ (somme des termes d'une suite géométrique) :

$$\begin{aligned}
&= \frac{br^{n-1}}{(b-1+r)^n} \times \frac{b-1+r}{b+r} \times \frac{1-\left(\dfrac{b-1+r}{b+r}\right)^n}{1-\dfrac{b-1+r}{b+r}} \\
&= br^{n-1} \times \frac{b-1+r}{b+r} \times \frac{\dfrac{1}{(b-1+r)^n} - \dfrac{1}{(b+r)^n}}{\dfrac{b+r}{b+r} - \dfrac{b-1+r}{b+r}} \\
&= br^{n-1} \times \frac{b-1+r}{b+r} \times \frac{\dfrac{1}{(b-1+r)^n} - \dfrac{1}{(b+r)^n}}{\dfrac{1}{b+r}} \\
&= \boxed{br^{n-1} \times (b-1+r) \times \left(\frac{1}{(b-1+r)^n} - \frac{1}{(b+r)^n}\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 6.
1) D'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(A) = 0,05 \quad ; \quad \mathbb{P}(D/A) = 0,6 \quad ; \quad \mathbb{P}(\overline{D}/\overline{A}) = 0,98.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A}) &= 1 - \mathbb{P}(A) = 0,95 \\
\mathbb{P}(\overline{D}/A) &= 1 - \mathbb{P}(D/A) = 0,4 \\
\mathbb{P}(D/\overline{A}) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{D}/\overline{A}) = 0,02
\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{P}(D)$ on applique la formule des probabilités totales avec pour S.C.E. A et $\overline{A}$; puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D/A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D/\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{A}) \\
&= 0,6 \times 0,05 + 0,02 \times 0,95 \\
&= 0,03 + 0,019 \\
&= \boxed{0,049}
\end{aligned}$$

2) On applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A/D) = \frac{\mathbb{P}(D/A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0,6 \times 0,05}{0,049} = \frac{6 \times 5}{49} = \boxed{\frac{30}{49}}$$

Exercice 7.
Appelons A,B,C,D les événements "l'élève emprunte l'itinéraire de même nom" et R : "l'élève arrive en retard".
D'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{12}$$

et

$$\mathbb{P}(R/A) = \frac{1}{20} \quad ; \quad \mathbb{P}(R/B) = \frac{1}{10} \quad ; \quad \mathbb{P}(R/C) = \frac{1}{5} \quad ; \quad \mathbb{P}(R/D) = 0$$

1) Puisque A, B, C, D forment un S.C.E. (l'élève emprunte un et un seul de ces itinéraires) :

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{12-4-3-1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2) On souhaite calculer $\mathbb{P}(C/R)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(C/R) = \frac{\mathbb{P}(R/C) \times \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{1}{60 \times \mathbb{P}(R)}$$

On est donc amené à calculer $\mathbb{P}(R)$; à l'aide de la formule des probabilités totales, et avec le SCE, A, B, C, D :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R/A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R/B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R/C) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(R/D) \times \mathbb{P}(D) \\
&= \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + 0
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$60 \times \mathbb{P}(R) = 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(C/R) = \frac{2}{7}}$$

Exercice 8.
Appelons A,B,C,D les événements "l'élève emprunte l'itinéraire de même nom" et R : "l'élève arrive en retard".
D'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{12}$$

et

$$\mathbb{P}(R/A) = \frac{1}{20} \quad ; \quad \mathbb{P}(R/B) = \frac{1}{10} \quad ; \quad \mathbb{P}(R/C) = \frac{1}{5} \quad ; \quad \mathbb{P}(R/D) = 0$$

1) Puisque A, B, C, D forment un S.C.E. (l'élève emprunte un et un seul de ces itinéraires) :

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{12-4-3-1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2) On souhaite calculer $\mathbb{P}(C/R)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(C/R) = \frac{\mathbb{P}(R/C) \times \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{1}{60 \times \mathbb{P}(R)}$$

On est donc amené à calculer $\mathbb{P}(R)$; à l'aide de la formule des probabilités totales, et avec le SCE, A, B, C, D :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R/A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R/B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R/C) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(R/D) \times \mathbb{P}(D) \\ &= \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$60 \times \mathbb{P}(R) = 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(C/R) = \frac{2}{7}}$$

Exercice 9. L'obtention de pile/face au n-ième lancer dépend de la pièce utilisée lors de ce lancer ; en notant :

A_n : "la pièce A est utilisée au n-ième lancer."
B_n : "la pièce B est utilisée au n-ième lancer."
A_n et B_n sont des événements contraires, et forment donc un SCE. D'après le formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}(F_n/A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(F_n/B_n) \times \mathbb{P}(B_n) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{2}{3} \times \mathbb{P}(B_n)} \qquad (*) \end{aligned}$$

en notant : F_n : "Obtention de face au n-ième lancer".

Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$a_k = \mathbb{P}(a_k) \qquad ; \qquad b_k = \mathbb{P}(B_k) = 1 - a_k$$

et cherchons à exprimer a_n et b_n en fonction de n en étudiant la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$.
La pièce utiilisée au $k+1$-ème lancer, dépend de celle utilisée au lancer précédent. Ainsi avec le SCE A_k, B_k, la formule des probabilités totales donne pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1}/A_k) \times \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{k+1}/B_k) \times \mathbb{P}(B_k)$$

puisque pile : on change de pièce ; face : on change pas :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{k+1}) &= \mathbb{P}(F_k/A_k) \times \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(\overline{F_k}/B_k) \times \mathbb{P}(B_k) \\ &= \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A_k) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(B_k) \\ \Longrightarrow a_{k+1} &= \frac{1}{2} \times a_k + \frac{1}{3} \times (1 - a_k) \\ \Longrightarrow a_{k+1} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times a_k + \frac{1}{3} \\ \Longrightarrow a_{k+1} &= \frac{1}{6} \times a_k + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La suite (a_n) est arithmético-géométrique de premier terme $a_1 = \dfrac{1}{2}$ (on choisit au début, au hasard, entre A et B). Déterminons son expression en fonction de n :
Le point fixe de sa fonction de récurrence est :

$$x = \frac{1}{6} \times x + \frac{1}{3} \iff \frac{5}{6}x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{2}{5}$$

La suite $a_n - \frac{2}{5}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$. Ainsi :

$$a_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{6^{n-1}} \times \frac{1}{10} \implies \boxed{a_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}} \times \frac{1}{10}}.$$

En remplaçant dans la relation $(*)$ établie au début :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \frac{1}{2} \times a_n + \frac{2}{3} \times b_n \\ &= \frac{1}{2} \times a_n + \frac{2}{3} \times (1 - a_n) \\ &= -\frac{1}{6} \times a_n + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}} \times \frac{1}{10}\right) + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{10} \times \frac{1}{6^n} + \frac{2}{3} - \frac{1}{15} \\ &= \boxed{-\frac{1}{10} \times \frac{1}{6^n} + \frac{3}{5}}\end{aligned}$$

C'est la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 10. on note G l'événement "obtenir (au moins) un billet gagnant".
Statégie A. On prend comme univers l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi 100 muni de la probabilité uniforme. Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{G}$:

$$\mathbb{P}(\overline{G}) = \frac{\operatorname{card} \overline{G}}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \implies \boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}} \qquad (a)$$

Stratégie B. Soit G_i l'événement "obtenir un billet gagnant la i-ème semaine". Encore une fois il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire.

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} G_i\right) = 1 - \mathbb{P}(\overline{G}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10} \overline{G}_i\right)$$

Puisque les 10 loteries se déroulent de manière indépendantes :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10} \overline{G}_i\right) = \prod_{i=1} 10\mathbb{P}\left(\overline{G}_i\right) = \prod_{i=1}^{10} \frac{100-k}{100} = \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(\overline{G}) = \boxed{1 - \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10}} \qquad (b)$$

Ainsi d'après (a) et (b), la stratégie A est meilleure que la B si et seulement si :

$$1 - \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \geqslant 1 - \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10} \iff \boxed{\left(\frac{100-k}{100}\right)^{10} \geqslant \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}(*) &\iff \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10} \geqslant \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \\ &\iff \frac{(100-k)^{10}}{100^{10}} \geqslant \frac{(100-k)!}{10!(90-k)!} \times \frac{10!90!}{100!} \\ &\iff \frac{(100-k)^{10}}{100^{10}} \geqslant \frac{(100-k)!}{(90-k)!} \times \frac{90!}{!100!} \\ &\iff \frac{(100-k)^{10}}{100^{10}} \geqslant \frac{\prod_{j=1}^{10}(90+j-k)}{\prod_{j=1}^{10}(90+j)} \\ &\iff \prod_{j=1}^{10}(90+j) \times (100-k) \geqslant \prod_{j=1}^{10}(90+j-k) \times 100 \\ &\iff \prod_{j=1}^{10}(90 \times 100 + j \times 100 - 90 \times k - jk) \geqslant \prod_{j=1}^{10}(90 \times 100 + j \times 100 - k \times 100)\end{aligned}$$

Comparons 2 à 2 les termes du produit pour $j \in [[1, 10]]$:

$$\begin{aligned}& 90 \times 100 + j \times 100 - 90 \times k - jk \geqslant 90 \times 100 + j \times 100 - k \times 100 \\ \iff & -90 \times k - jk \geqslant -k \times 100 \\ \iff & k \times 100 \geqslant k \times (90 + j) \\ \iff & 10 \geqslant j\end{aligned}$$

ce qui est vrai. Ainsi par produit d'inégalités à termes positifs :

$$\prod_{j=1}^{10}(90 \times 100 + j \times 100 - 90 \times k - jk) \geqslant \prod_{j=1}^{10}(90 \times 100 + j \times 100 - k \times 100)$$

Par équivalence $(*)$ est vraie et donc la stratégie A est meilleure ; ce qui se comprend : en achetant les billets la même semaine, on épuise les billets perdants chaque fois qu'on en achète, le prochain billet acheté aura donc un peu plus de chances d'être gagnant.

Problème.
Partie I.

1) On a de même :

$$q_n = \mathbb{P}(A_{0,n} \cap B_{1,n}) \quad ; \quad r_n = \mathbb{P}(A_{1,n} \cap B_{0,n}) \quad ; \quad t_n = \mathbb{P}(A_{1,n} \cap B_{1,n})$$

2)

$$p_0 = 1, \quad q_0 = r_0 = t_0 = 0$$

Soit a_i, b_i et c_i les évènements : "au i-ième tir on a obtenu la lettre 'a' (respectivement 'b' et 'c')".

$$p_1 = \mathbb{P}(c_1) = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \mathbb{P}(b_1) = \frac{1}{3}, \quad r_1 = \mathbb{P}(a_1) = \frac{1}{3}, \quad t_1 = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

3) En appliquant la formule des probabilités totales avec le S.C.E. : $A_{0,n} \cap B_{0,n}$, $A_{0,n} \cap B_{1,n}$, $A_{1,n} \cap B_{0,n}$, $A_{1,n} \cap B_{1,n}$:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \\
&= \mathbb{P}((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{0,n} \cap B_{0,n})) + \mathbb{P}((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{0,n} \cap B_{1,n})) \\
&\quad + \mathbb{P}((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{1,n} \cap B_{0,n})) + \mathbb{P}((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{1,n} \cap B_{1,n})) \\
&= \mathbb{P}(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{0,n} \cap B_{0,n}) \times \mathbb{P}(A_{0,n} \cap B_{0,n}) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{0,n} \cap B_{1,n}) \times \mathbb{P}(A_{0,n} \cap B_{1,n})) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{1,n} \cap B_{0,n}) \times \mathbb{P}(A_{1,n} \cap B_{0,n}) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{1,n} \cap B_{1,n}) \times \mathbb{P}(A_{1,n} \cap B_{1,n}) \\
&= \mathbb{P}(c_n) \times p_n + \mathbb{P}(b_n) \times q_n + \mathbb{P}(a_n) \times r_n + \mathbb{P}(\varnothing) \times t_n \\
p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n
\end{aligned}$$

Le même calcul donne :

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}t_n \\
r_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n \\
t_{n+1} &= \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n
\end{aligned}$$

4) On a donc :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=R} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

5) Par une récurrence immédiate, on déduit de $X_{n+1} = R \times X_n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = R^n \times X_0$.

Partie II.

1) Le calcul donne $U^2 = 4.U$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $U^n = 4^{n-1}.U$.

Le calcul donne $V^2 = I$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $V^n = \begin{cases} V & \text{si } n \text{ est impair} \\ I & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

2) On vérifie aisément que U et V commutent : $UV = VU$; on peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
(U - V)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^{n-k}(-V)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} U^{n-k}(-V)^k + I \times (-V)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 4^{n-k-1} U \times (-1)^k V^k + (-1)^n V^n
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le calcul donne $U \times V = U$, ainsi :

$$\begin{aligned}
(U-V)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k 4^{n-k-1} U + (-1)^n V^n \\
&= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 4^{n-k} - (-1)^n \right) U + (-1)^n V^n \\
&= \frac{1}{4} \left((4-1)^n - (-1)^n \right) . U + (-1)^n V^n \\
&= \frac{1}{4} \left(3^n - (-1)^n \right) . U + (-1)^n V^n
\end{aligned}$$

3) Le calcul donne immédiatement $R = \dfrac{1}{3}(U-V)$.

4) On a donc

$$X_n = R^n X_0 = \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{4} \left(3^n - (-1)^n \right) . U + (-1)^n V^n \right) X_0$$

Ainsi, si n est pair : $\begin{cases} p_n = \dfrac{3^n+3}{4 \times 3^n} \\ q_n = \dfrac{3^n-1}{4 \times 3^n} \\ r_n = \dfrac{3^n-1}{4 \times 3^n} \\ t_n = \dfrac{3^n-1}{4 \times 3^n} \end{cases}$ et si n est impair : $\begin{cases} p_n = \dfrac{3^n+1}{4 \times 3^n} \\ q_n = \dfrac{3^n+1}{4 \times 3^n} \\ r_n = \dfrac{3^n+1}{4 \times 3^n} \\ t_n = \dfrac{3^n-3}{4 \times 3^n} \end{cases}$