Exercice 6.

1. Loi de Y : l'univers-image est $Y(\Omega) = [[0,2]]$ et :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) \quad ; \quad \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1)$$
$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$$

On obtient la loi de Y :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$0,1$	$0,3$	$0,6$

2. $E(Y) = 0,3 + 1,2 = 1,5$
La marge brute moyenne par jour est donc de : $E(Y) \times 50€ = \boxed{75€}$.
3. Soit N le nombre de véhicule disponible chaque jour ; $N \hookrightarrow \mathscr{B}(2, \frac{4}{5})$:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(N=k)$	$\dfrac{1}{25}$	$\dfrac{8}{25}$	$\dfrac{16}{25}$

Ainsi :
• $(Y=0) = (X=0) \cup (N=0)$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(N=0) - \mathbb{P}((X=0) \cap (N=0)) \\ &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(N=0) - \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(N=0) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{25} - \frac{1}{250} = \frac{34}{250}\end{aligned}$$

• $(Y=1) = ((X \geq 1) \cap (N=1)) \cup ((X=1) \cap (N \geq 1))$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}((X \geq 1) \cap (N=1)) + \mathbb{P}((X=1) \cap (N \geq 1)) - \mathbb{P}((X=1) \cap (N=1)) \\ &= \mathbb{P}(X \geq 1) \times \mathbb{P}(N=1) + \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(N \geq 1) - \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(N=1) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{25} + \frac{3}{10} \times \frac{24}{25} - \frac{8}{25} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{120}{250}\end{aligned}$$

Pour finir : $\mathbb{P}(Y=2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2) = \dfrac{250 - 34 - 120}{250} = \dfrac{96}{250}$

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{34}{250}$	$\frac{120}{250}$	$\frac{96}{250}$

Ainsi son espérance est :

$$E(Y) = \frac{1 \times 120 + 2 \times 96}{250} = \frac{312}{250}$$

En moyenne, la marge brute quotidienne est donc de $50E(Y) = \boxed{62,40€}$.

Exercice 7.
1) La V.A.R. X_n peut prendre deux valeurs : 1 et $1+n$. Ainsi $Yn = \frac{X_n}{n}$ peut aussi prendre deux valeurs $\frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n}$; $Y_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right\}$. Ainsi la V.A.R. $Y_n - \dfrac{1}{n}$ prend pour valeurs 0 et 1 avec probabilités non nulles ; c'est donc une variable de Bernoulli.
Calculons son paramètre : L'événement $\left(Y_n - \frac{1}{n} = 1\right)$ est l'événement : "le mélange de lait des n vaches est contaminé", soit "au moins une vache contaminée". Il est plus simple de calculer la probabilté de l'événement contraire : "aucune vache contaminée" dont la probabilité est $0,85^n$ (on suppose la contamination des vaches indépendantes, comme sous-entendu par l'énoncé puisque $p = 0,15$ pour chaque vache).
Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(Y_n - \frac{1}{n} = 1\right) = 1 - 0,85^n$$

D'où la loi de Y_n :

y	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$
$\mathbb{P}(Y_n = y)$	$0,85^n$	$1 - 0,85^n$

Par linéarité de l'espérance : $E(Y_n) = E(Y_n - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = 1 - 0,85^n + \frac{1}{n}$.

2.a) Soit $f(x) = ax + \ln x$ avec $a < 0$; f est dérivable et $f'(x) = a + \frac{1}{x}$; ainsi :

$$f'(x) > 0 \iff a + \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} > -a > 0 \iff x < -\frac{1}{a}$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0		$-\frac{1}{a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

En particulier $f(x)$ présente un maximum en $x=-\frac{1}{a}$ de valeur :

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=-1-\ln\left(-\frac{1}{a}\right)=-1-\ln(-a)$$

Lorsque $a=\ln 0,85$: $f\left(-\frac{1}{a}\right)\approx 0,817>0$ (avec la calculatrice).

2.b)

$$f(n_0)=\ln 0,85\times n_0+\ln n_0>0 \iff \frac{\ln n_0}{n_0}>-\ln 0,85\approx 0,16$$

L'application $x\longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est croissante sur $]0,e]$ puis décroissante sur $[e;+\infty[$ puisque sa dérivée vaut $\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. À la calculatrice on trouve que l'entier n_0 vaut au plus 17.

2.c) On a

$$\begin{aligned}
E(Y_n)<1 &\iff 1+\frac{1}{n}-0,85^n<1\\
&\iff \frac{1}{n}<O,85^n\\
&\underset{\ln\nearrow}{\iff} \ln\frac{1}{n}<n\ln 0,85\\
&\iff -\ln n<n\ln 0,85\\
&\iff (\ln 0,85)n+\ln n>0\\
&\iff f(n)>0 \qquad\qquad \text{avec } a=\ln 0,85
\end{aligned}$$

La deuxième méthode et plus intéressante que la première si en moyenne on effectue moins de n analyses, c'est à dire si $E(X_n)<n \iff E(Y_n)<1$; c'est le cas lorsque $f(n)>0$ ainsi d'après 2.b pour des troupeaux d'au plus 17 vaches ; au-delà la première méthode sera préférable.

Exercice 8.
Soient les événements :

B_k : "la k-ième boule tirée est blanche"

R_k : la k-ième boule tirée est rouge.

1) Loi de X_1 : $X_1\hookrightarrow\mathscr{B}(1/2)=\mathscr{U}([[0,1]])$.

2) Loi de X_2 : $X_2(\Omega)=\{0,1,2\}$.

$\mathbb{P}(X_2=0)=\mathbb{P}(R_1\cap R_2)=\mathbb{P}(R_1)\times\mathbb{P}_{R_1}(R_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2=1)&=\mathbb{P}((R_1\cap B_2)\cup(B_1\cap R_2))\underset{\text{incomp.}}{=}\mathbb{P}(R_1\cap B_2)+\mathbb{P}(B_1\cap R_2)\\
&=\mathbb{P}(R_1)\times\mathbb{P}_{R_1}(B_2)+\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(R_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(X_2=2)=\mathbb{P}(B_1\cap B_2)=\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(B_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

Ainsi $X_2\hookrightarrow\mathscr{U}([[0,2]])$.

3) ON conjecture d'après ce qui précède $X_n\hookrightarrow\mathscr{U}([[0,n]])$; montrons-le par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. L'initialisation découle de 1). Montrons l'hérédité.

Supposons que $X_n\hookrightarrow\mathscr{U}([[0,n]])$; déterminons la loi de X_{n+1}. Son univers image est clairement $X_{n+1}(\Omega)=[[0,n+1]]$; soit $k\in[[0,n+1]]$, calculons $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)$ à l'aide de la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(X_n=j)_{j\in[[0,n]]}$:

$$P(X_{n+1}=k)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}((X_{n+1}=k)\cap(X_n=j))$$

Or les événements $(X_{n+1}=k)\cap(X_n=j)$ peuvent être décrits par :

$$(X_{n+1}=k)\cap(X_n=j)=\begin{cases}R_{n+1}\cap(X_n=k) & \text{si } j=k\\ B_{n+1}\cap(X_n=k-1) & \text{si } j=k-1\\ \varnothing & \text{sinon}\end{cases}$$

Ainsi :
Si $k=0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=0)&=\mathbb{P}(R_{n+1}\cap(X_n=0))\\
&=\mathbb{P}(X_n=0)\times\mathbb{P}_{(X_n=0)}(R_{n+1})\\
&\underset{(HR)}{=}\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}\\
&=\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

puisque sachant $(X_n=0)$, au $(n+1)$-ème tir l'urne contient $n+1$ boules rouges et 1 boule blanche, soit $n+2$ boules.

Si $k > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(R_{n+1} \cap (X_n = k)) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap (X_n = k-1)) \\
&= \mathbb{P}(X_n = k) \times \mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n = k-1) \times \mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) \\
&\underset{(HR)}{=} \frac{1}{n+1} \times \frac{n-k+1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

puisque :

sachant $(X_n = k)$, au $(n+1)$-ème tir l'urne contient $n-k+1$ boules rouges et $k+1$ boules blanches, soit $n+2$ boules. (On a rajouté k blanches et $n-k$ rouges).

sachant $(X_n = k-1)$, au $(n+1)$-ème tir l'urne contient $n-k+2$ boules rouges et k boules blanches, soit $n+2$ boules. (On a rajouté $k-1$ blanches et $n-k+1$ rouges).

Ainsi $\forall k \in [[0, n+1]]$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$. On a bien $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{U}([[0, n+1]])$. L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$, ce qui conclut la récurrence, et prouve notre conjecture.

Exercice 9.

1) X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_1)$.

$X_2(\Omega) = \{0,1\}$. D'après la formule des probabiltés totales avec le sce $(X_1 = 0)$, $(X_1 = 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}(X_2 = 1/X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1/X_1 = 1) \\
&= (1-p_1) \times \frac{a}{2a+1} + p_1 \times \frac{a+1}{2a+1} \\
&= \frac{a+p_1}{2a+1}
\end{aligned}$$

car :

lorsque $(X_1 = 0)$ est réalisé, l'urne 2 contient a blanches et $a+1$ noires,

lorsque $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne 2 contient $a+1$ blanches et a noires.

Ainsi $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{a+p_1}{2a+1}\right)$. En particulier :

$$E(X_1) = p_1 \quad ; \quad V(X_1) = p_1(1-p_1)$$
$$E(X_2) = \frac{a+p_1}{2a+1} \quad ; \quad V(X_2) = \frac{a+p_1}{2a+1} \times \frac{a+1-p_1}{2a+1}$$

2) X_1 et X_2 suivant toutes deux des lois de Bernoulli, elles suivent la même loi si et seulement si les lois ont même paramètre :

$$p_1 = \frac{a+p_1}{2a+1} \iff p_1 = \frac{1}{2}.$$

3) Pour cette valeur :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1+p_1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1/X_1 = 0) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(X_2 = 1) > \frac{1}{2}$$

donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4) Exprimons p_{k+1} et q_{k+1} en fonction de p_k, q_k. En appliquant la FPT avec le SCE $(X_k = 0)$ et $(X_k = 1)$:

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1/X_k = 0) \times \mathbb{P}(X_k = 0) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1/X_k = 1) \times \mathbb{P}(X_k = 1) \\
&= \frac{a}{2a+1} \times q_k + \frac{a+1}{2a+1} \times p_k \\
q_{k+1} &= \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 0/X_k = 0) \times \mathbb{P}(X_k = 0) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 0/X_k = 1) \times \mathbb{P}(X_k = 1) \\
&= \frac{a+1}{2a+1} \times q_k + \frac{a}{2a+1} \times p_k
\end{aligned}$$

Ainsi matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2a+1} \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$

et

$$M = \frac{1}{2a+1} \left(\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} + I_2 \right)$$

5) En notant $P = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = a \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient facilement :

$$P^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 0 \\ a^n \times 2^{n-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

que l'on peut établir par récurrence (l'initialisation est claire) :
(H)

$$P^{n+1} \underset{HR}{=} a \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times a^n \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a^{n+1} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = a^{n+1} \times 2^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque P et I commutent, on peut appliquer la formule du binôme

$$\begin{aligned} M^n &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \times (P+I_2)^n \\ &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k \times I_2^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k \\ &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \times \left(I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2a)^k}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \times \left(I_2 + \begin{pmatrix} a_n & a_n \\ a_n & a_n \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2a)^k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2a)^k - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times ((1+2a)^n - 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{(2a+1)^n} I_2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2a+1)^n} \times \begin{pmatrix} (1+2a)^n - 1 & (1+2a)^n - 1 \\ (1+2a)^n - 1 & (1+2a)^n - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(2a+1)^n} I_2 + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2(2a+1)^n} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(2a+1)^n} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{(2a+1)^n} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2(2a+1)^n} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{(2a+1)^n} & 1 - \frac{1}{(2a+1)^n} \\ 1 - \frac{1}{(2a+1)^n} & 1 + \frac{1}{(2a+1)^n} \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6) Puisque

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

on en déduit l loi de X_n : $X_n(\Omega) = [[0,1]]$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n &= \frac{p_1 + q_1}{2} + \frac{p_1 - q_1}{2(2a+1)^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{p_1 - q_1}{2(2a+1)^{n-1}} \\ \mathbb{P}(X_n = 0) = q_n &= \frac{p_1 + q_1}{2} + \frac{q_1 - p_1}{2(2a+1)^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{q_1 - p_1}{2(2a+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

et les limites

$$\begin{aligned} \lim p_n &= \frac{p_1}{2} + \frac{q_1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim q_n &= \frac{p_1}{2} + \frac{q_1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi X_n tend vers la loi de Bernoulli uniforme.

Exercice 10.
1a) X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ vu qu'on est en présence d'un schéma de Bernoulli.
Ainsi :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq$$

2a) $Z(\Omega) = [[0, n]]$.

2b) Avec la formule de conditionnement :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}(Z=0)} &= \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0)) = P(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0/X=0)\\
&= \binom{n}{0}p^0q^n \times q^n\\
&= \boxed{q^{2n}}\\
\boxed{\mathbb{P}(Z=1)} &= \mathbb{P}(((X=1)\cap(Y=0))\cup((X=0)\cap(Y=0)))\\
&= \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=0)) + \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1)) \qquad \text{(incompatibilité)}\\
&= P(X=1)\times\mathbb{P}(Y=0/X=1)\\
&\quad + P(X=0)\times\mathbb{P}(Y=1/X=0)
\end{aligned}$$

Or $Y/(X=0) \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$; $Y/(X=1) \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1,p)$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{1}p^1q^{n-1}\times\binom{n-1}{0}p^0q^{n-1} + \binom{n}{0}p^0q^n\times\binom{n}{1}pq^{n-1}\\
&= npq^{2n-2} + npq^{2n-1}\\
&= \boxed{npq^{2n-2}(1+q)}
\end{aligned}$$

2c) On remarque que pour tout $i \in [[0,n]]$ $Y/(X=i)$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n-i,p)$, puisqu'on est encore en présence d'une schéma de Bernoulli (mais répété $n-i$ fois pour les personnes qu'on n'a pas réussi à joindre au premier appel). Ainsi

$$\forall i \in [[0,n]], \forall j \in [[0,n-i]],\ \mathbb{P}((Y=j)/(X=i)) = \binom{n-i}{j}p^jq^{n-i-j}$$

2.d) Soit $k \in [[0,n]]$; d'après la loi de la somme :

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{\substack{i+j=k\\(i,j)\in[[0,n]]^2}} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i)).$$

2e) Soit $k \in [[0,n]]$;

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i))\\
&= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}((Y=k-i)/(X=i))\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\times\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}q^{n-i-(k-i)}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^kq^{2n-i-k}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}p^kq^{2n-i-k}
\end{aligned}$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\times\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{i!}\times\frac{1}{(k-i)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{i!(k-i)!}\\
&= \binom{n}{k}\binom{k}{i}
\end{aligned}$$

Ainsi en appliquant la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \binom{n}{k}p^kq^{2n-2k}\sum_{k=0}^{k}\binom{k}{i}q^{k-i}\\
&= \binom{n}{k}p^kq^{2n-2k}\times(1+q)^k \qquad \text{avec la formule du binôme}\\
&= \binom{n}{k}\times(p(1+q))^k\left(q^2\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or $1-p(1+q) = 1-p-pq = q-pq = q(1-p) = q^2$. Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p(1+q))$.

Remarquons qu'on aurait pu l'obtenir directement : on a le schéma de Bernoulli, consistant pour chacune des n personnes à : l'appeler, et la rappeler si on ne l'a pas eu au premier appel.
Pour chaque personne, la probabilité de la joindre est alors : $p+qp$ (obtenu au premier appel ou raté puis obtenu au deuxième). On répète n fois de manière indépendantes l'expérience consistant à tenter de joindre une personne en au plus 2 appels, et on compte les réussites.
Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p+qp)$.