Fonctions récursives - I

BCPST - Lycée Fénelon

Fonctions récursives
- Notion de récursivité
- Pile d'exécution

Exemples
- Rangées de briques
- L'algorithme d'exponentiation rapide

Correction de l'exercice
- Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

Récursivité

- Une fonction en `python` peut appeler toute fonction définie.
- En particulier une fonction (en `python` ou tout autre langage de programmation) peut s'appeler elle-même. **On parle alors de fonction récursive :** une fonction est récursive lorsqu'elle s'appelle elle même.

Récursivité

- Une fonction en `python` peut appeler toute fonction définie.
- En particulier une fonction (en `python` ou tout autre langage de programmation) peut s'appeler elle-même. **On parle alors de fonction récursive :** une fonction est récursive lorsqu'elle s'appelle elle même.
- Notamment lorsque le calcul de `fonction(n)` appelle le calcul de `fonction(n-1)`, etc... jusqu'à résoudre celui de `fonction(0)`.
- Un exemple classique est le calcul de factorielle n : $n!$.

```
def fact(n):
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

Récursivité

- Une fonction en `python` peut appeler toute fonction définie.
- En particulier une fonction (en `python` ou tout autre langage de programmation) peut s'appeler elle-même. **On parle alors de fonction récursive :** une fonction est récursive lorsqu'elle s'appelle elle même.
- Notamment lorsque le calcul de `fonction(n)` appelle le calcul de `fonction(n-1)`, etc... jusqu'à résoudre celui de `fonction(0)`.
- Un exemple classique est le calcul de factorielle n : $n!$.

```
def fact(n):
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

- Par exemple l'appel de `fact(3)` appelle `fact(2)` qui appelle `fact(1)` qui finalement appelle `fact(0)` qui retourne 1.

Récursivité

- Une fonction en `python` peut appeler toute fonction définie.
- En particulier une fonction (en `python` ou tout autre langage de programmation) peut s'appeler elle-même. **On parle alors de fonction récursive :** une fonction est récursive lorsqu'elle s'appelle elle même.
- Notamment lorsque le calcul de `fonction(n)` appelle le calcul de `fonction(n-1)`, etc... jusqu'à résoudre celui de `fonction(0)`.
- Un exemple classique est le calcul de factorielle n : $n!$.

```
def fact(n):
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

- Par exemple l'appel de `fact(3)` appelle `fact(2)` qui appelle `fact(1)` qui finalement appelle `fact(0)` qui retourne 1.

Ainsi `fact(1)` retourne `1*fact(0)`$=1$,

Récursivité

- Une fonction en `python` peut appeler toute fonction définie.
- En particulier une fonction (en `python` ou tout autre langage de programmation) peut s'appeler elle-même. **On parle alors de fonction récursive :** une fonction est récursive lorsqu'elle s'appelle elle même.
- Notamment lorsque le calcul de `fonction(n)` appelle le calcul de `fonction(n-1)`, etc... jusqu'à résoudre celui de `fonction(0)`.
- Un exemple classique est le calcul de factorielle n : $n!$.

```
def fact(n):
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

- Par exemple l'appel de `fact(3)` appelle `fact(2)` qui appelle `fact(1)` qui finalement appelle `fact(0)` qui retourne 1.

Ainsi `fact(1)` retourne `1*fact(0)`$=1$, `fact(2)` retourne `2*fact(1)`$=2$, et finalement `fact(3)` retourne `3*fact(2)`$=6$.

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

PILE
`fact(3) = 3*fact(2)`

– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2)`

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

PILE
`fact(2) = 2*fact(1)`
`fact(3) = 3*fact(2)`

– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2)`

– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1)`

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

PILE
`fact(1) = 1*fact(0)`
`fact(2) = 2*fact(1)`
`fact(3) = 3*fact(2)`

– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2)`

– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1)`

– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)`

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

PILE
`fact(0) = 1`
`fact(1) = 1*fact(0)`
`fact(2) = 2*fact(1)`
`fact(3) = 3*fact(2)`

– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2)`
– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1)`
– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)`
– Appel de `fact(0)` : Retourne `1`

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

PILE
`fact(1) = 1*fact(0) = 1 * 1 = 1`
`fact(2) = 2*fact(1)`
`fact(3) = 3*fact(2)`

– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2)`

– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1)`

– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$

– Appel de `fact(0)` : Retourne 1

Récursivité : pile d'exécution

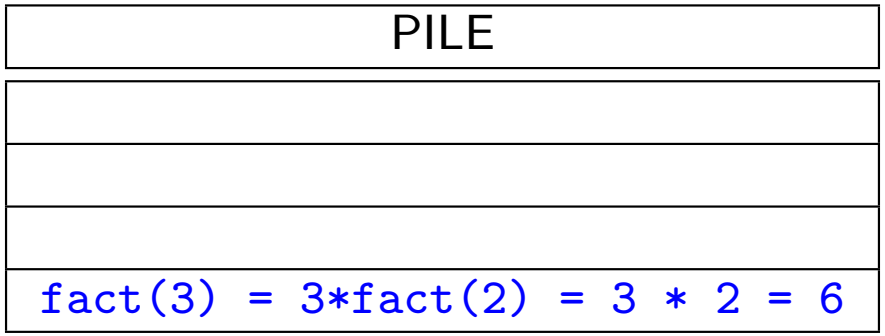
- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

PILE
`fact(2) = 2*fact(1) = 2 * 1 = 2`
`fact(3) = 3*fact(2)`

- Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2)`
- Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1) = 2`
- Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$
- Appel de `fact(0)` : Retourne 1

Récursivité : pile d'exécution

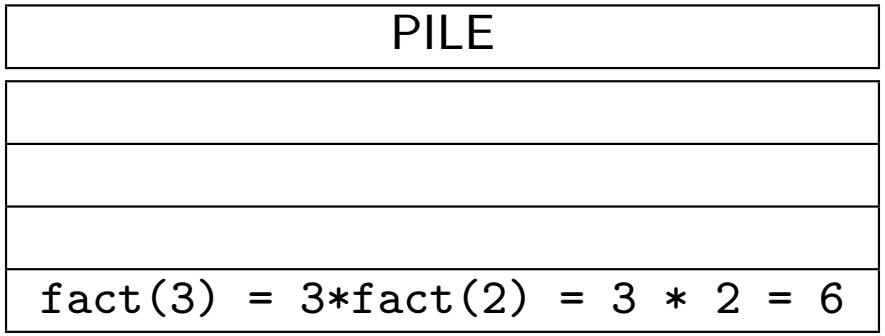
- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.



– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2) = 6`. C'est le résultat retourné.
– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1) = 2`
– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$
– Appel de `fact(0)` : Retourne 1

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

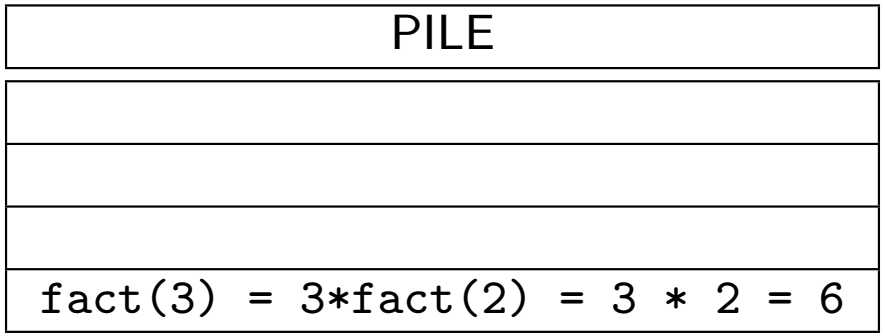


– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2) = 6`. C'est le résultat retourné.
– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1) = 2`
– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$
– Appel de `fact(0)` : Retourne 1

- La complexité (ici !) est linéaire en temps et en espace.

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

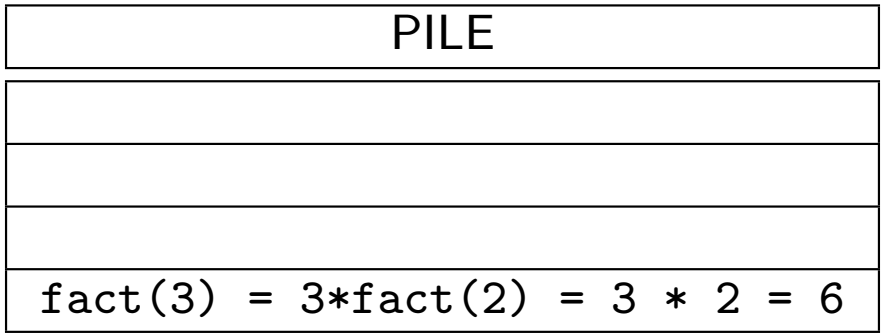


– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2) = 6`. C'est le résultat retourné.
– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1) = 2`
– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$
– Appel de `fact(0)` : Retourne 1

- La complexité (ici !) est linéaire en temps et en espace.
- Avantages : élégant, concis, se prête bien à la récurrence, permet de résoudre facilement des problèmes compliqués.

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.

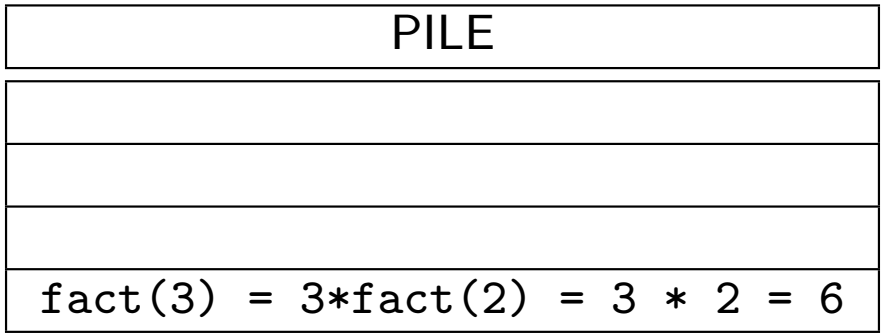


– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2) = 6`. C'est le résultat retourné.
– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1) = 2`
– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$
– Appel de `fact(0)` : Retourne 1

- La complexité (ici !) est linéaire en temps et en espace.
- Avantages : élégant, concis, se prête bien à la récurrence, permet de résoudre facilement des problèmes compliqués.
- Inconvénients : complexité en espace (du fait de la pile d'exécution).

Récursivité : pile d'exécution

- Les appels successifs sont stockés dans une pile d'exécution.



– Appel de `fact(3)` : Retourne `3*fact(2) = 6`. C'est le résultat retourné.
– Appel de `fact(2)` : Retourne `2*fact(1) = 2`
– Appel de `fact(1)` : Retourne `1*fact(0)` $= 1$
– Appel de `fact(0)` : Retourne 1

- La complexité (ici !) est linéaire en temps et en espace.
- Avantages : élégant, concis, se prête bien à la récurrence, permet de résoudre facilement des problèmes compliqués.
- Inconvénients : complexité en espace (du fait de la pile d'exécution). En `python` le nombre d'appels récursifs est limité à 1000 : pile de capacité limitée.

Récursivité

- Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinis.

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinis.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinis.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

• Amélioration du programme pour éviter ce phénomène :

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinis.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

• Amélioration du programme pour éviter ce phénomène :

```
def fact(n):
    if not(isinstance(n,int)) or n < 0:
        print("Erreur : l'argument doit être un entier positif")
        return
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinies.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

• Amélioration du programme pour éviter ce phénomène : ou encore,

```
def fact(n):
    assert isinstance(n,int) and n >= 0
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinies.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

• Amélioration du programme pour éviter ce phénomène : ou encore,

```
def fact(n):
    assert isinstance(n,int) and n >= 0
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

• Terminaison et correction du programme :

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinies.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

• Amélioration du programme pour éviter ce phénomène : ou encore,

```
def fact(n):
    assert isinstance(n,int) and n >= 0
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

• Terminaison et correction du programme :

1. si l'argument `n` n'est pas un entier naturel : terminaison avec erreur.

Récursivité

• Autre désavantage : la récursivité peut facilement donner lieu à des boucles infinies.

Par exemple dans le programme précédent l'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)`, qui appelle `fact(-3)`, etc..., donnant lieu à une boucle infinie, et dans la pratique à une erreur de dépassement de capacité de la pile d'exécution.

• Amélioration du programme pour éviter ce phénomène : ou encore,

```
def fact(n):
    assert isinstance(n,int) and n >= 0
    if (n == 0):                    # Initialisation
        return 1                    # 0! = 1
    else:
        return n * fact(n-1)        # Relation de récurrence
```

• Terminaison et correction du programme :

1. si l'argument `n` n'est pas un entier naturel : terminaison avec erreur.
2. si `n` est un entier naturel : terminaison et correction de `fact(n)` se démontrent par un récurrence immédiate sur n : vrai si $n = 0$, et si `fact(n-1)` se termine et retourne $(n-1)!$, alors `fact(n)` se termine en retournant $n.(n-1)! = n!$.

Exemple : rangées de brique

- Etudions un autre exemple où le principe de récurrence est plutôt analogue au principe de récurrence forte.

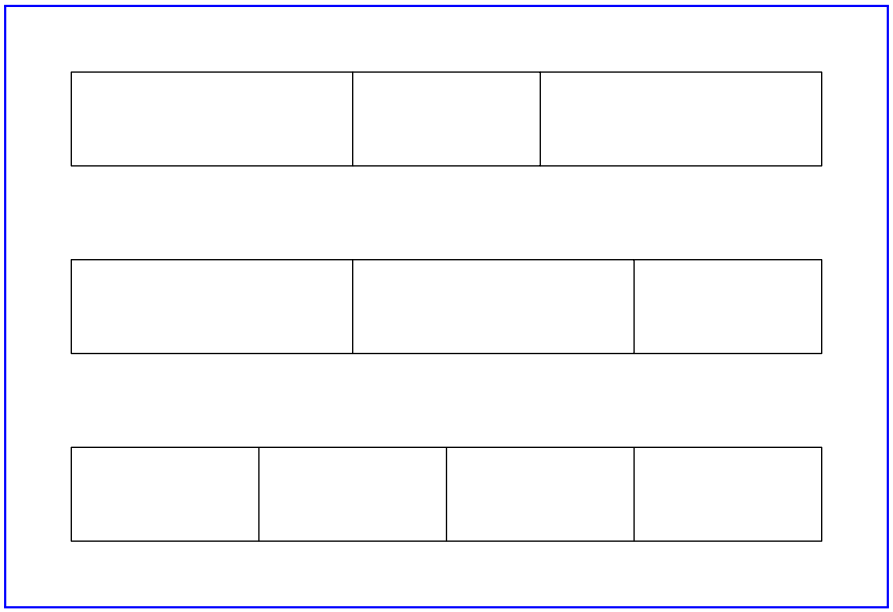
Exemple : rangées de brique

• Etudions un autre exemple où le principe de récurrence est plutôt analogue au principe de récurrence forte.

• Soit $N \geqslant 2$ un entier naturel. Combien y a t-il de façon de constituer une rangée de briques de longueur N en utilisant seulement des briques de longueur 2 et 3 ?

Exemple : rangées de brique

- Etudions un autre exemple où le principe de récurrence est plutôt analogue au principe de récurrence forte.
- Soit $N \geqslant 2$ un entier naturel. Combien y a t-il de façon de constituer une rangée de briques de longueur N en utilisant seulement des briques de longueur 2 et 3 ?
- Exemple : Voilà 3 façons de faire une rangée de longueur 8 (il y en a d'autres).



Exemple : rangées de brique

- Pour le résoudre facilement : on va procéder par récursivité en se ramenant :

Exemple : rangées de brique

- Pour le résoudre facilement : on va procéder par récursivité en se ramenant :
  1. Au cas $N-2$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 2.
  2. Au cas $N-3$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 3.

Exemple : rangées de brique

- Pour le résoudre facilement : on va procéder par récursivité en se ramenant :
  1. Au cas $N-2$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 2.
  2. Au cas $N-3$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 3.

L'ensemble $\{$rangées de briques$\}$ est partitionné en :

$\{$rangées de briques finissant par longueur 2$\}$
$\{$rangées de briques finissant par longueur 3$\}$.

Exemple : rangées de brique

- Pour le résoudre facilement : on va procéder par récursivité en se ramenant :
  1. Au cas $N-2$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 2.
  2. Au cas $N-3$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 3.

L'ensemble $\{$rangées de briques$\}$ est partitionné en :

$\{$rangées de briques finissant par longueur 2$\}$
$\{$rangées de briques finissant par longueur 3$\}$.

- On a la relation de récurrence :

Nombre de rangées(N) = Nombre de rangées(N-2) + Nombre de rangées(N-3)

Exemple : rangées de brique

- Pour le résoudre facilement : on va procéder par récursivité en se ramenant :
  1. Au cas $N-2$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 2.
  2. Au cas $N-3$: lorsqu'on ajoute à la fin de la rangée une brique de longueur 3.

L'ensemble $\{$rangées de briques$\}$ est partitionné en :

$\{$rangées de briques finissant par longueur 2$\}$
$\{$rangées de briques finissant par longueur 3$\}$.

- On a la relation de récurrence :

Nombre de rangées(N) = Nombre de rangées(N-2) + Nombre de rangées(N-3)

- On en déduit la résolution par la fonction récursive :

```
def briques(N):
    if N < 2:
        return 0
    elif (N == 2) or (N == 3):
        return 1
    else:
        return briques(N-2) + briques(N-3)
```

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Regardons un autre exemple, lui très utile en pratique :

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Regardons un autre exemple, lui très utile en pratique :
- **Calcul d'une puissance x^n par multiplications successives**

Supposons que l'on s'interdise l'emploi de l'opération de mise en puissance (comme c'est le cas pour un microprocesseur), et que l'on veuille écrire une fonction prenant en paramètre un nombre x et un entier n et qui retourne la puissance x^n.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Regardons un autre exemple, lui très utile en pratique :
- **Calcul d'une puissance x^n par multiplications successives**

Supposons que l'on s'interdise l'emploi de l'opération de mise en puissance (comme c'est le cas pour un microprocesseur), et que l'on veuille écrire une fonction prenant en paramètre un nombre x et un entier n et qui retourne la puissance x^n.

- Solution naïve non récursive, à l'aide d'une boucle `for` :

```
def puissance(x,n):
    result = 1
    for i in range(n):
        result = result * x
    return result
```

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Regardons un autre exemple, lui très utile en pratique :
- **Calcul d'une puissance x^n par multiplications successives**

Supposons que l'on s'interdise l'emploi de l'opération de mise en puissance (comme c'est le cas pour un microprocesseur), et que l'on veuille écrire une fonction prenant en paramètre un nombre x et un entier n et qui retourne la puissance x^n.

- Solution naïve non récursive, à l'aide d'une boucle `for` :

```
def puissance(x,n):
    result = 1
    for i in range(n):
        result = result * x
    return result
```

Compléxité : linéaire (en $O(n)$) en temps dans le pire et le meilleur des cas.
Bornée (en $O(1)$) en espace.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Regardons un autre exemple, lui très utile en pratique :
- **Calcul d'une puissance x^n par multiplications successives**

Supposons que l'on s'interdise l'emploi de l'opération de mise en puissance (comme c'est le cas pour un microprocesseur), et que l'on veuille écrire une fonction prenant en paramètre un nombre x et un entier n et qui retourne la puissance x^n.

- Solution naïve, récursive :

```
def puissance(x,n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * puissance(x,n-1)
```

Compléxité : linéaire (en $O(n)$) en temps dans le pire et le meilleur des cas.
Linéaire (en $O(n)$) en espace.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- On peut aller beaucoup plus vite, en mettant à profit les propriétés de la mise en puissance :

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

• On peut aller beaucoup plus vite, en mettant à profit les propriétés de la mise en puissance :

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^{2p} = \left(x^2\right)^p \quad ; \quad x^{2p+1} = x.x^{2p}$$

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

• On peut aller beaucoup plus vite, en mettant à profit les propriétés de la mise en puissance :

$$\boxed{x^0 = 1 \quad ; \quad x^{2p} = (x^2)^p \quad ; \quad x^{2p+1} = x.x^{2p}}$$

• Ainsi :

$$puissance(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{si n=0} \\ puissance(x^2, n/2) & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times puissance(x^2, (n-1)/2) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

• On peut aller beaucoup plus vite, en mettant à profit les propriétés de la mise en puissance :

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^{2p} = (x^2)^p \quad ; \quad x^{2p+1} = x.x^{2p}$$

• Ainsi :

$$puissance(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{si n=0} \\ puissance(x^2, n/2) & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times puissance(x^2, (n-1)/2) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

• Code python :

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n%2==0:
        return puissance(x**2,n//2)
    else:
        return x * puissance(x**2,n//2) # ici : n//2 = (n-1)/2
```

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

• 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.

• 50 est pair. On obtient $(x_1)^{50}$ en élevant x_1 au carré, $x_2 = (x_1)^2$ (2ème mult.) ; on devra élever x_2 à l'exposant 25.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.
- 50 est pair. On obtient $(x_1)^{50}$ en élevant x_1 au carré, $x_2 = (x_1)^2$ (2ème mult.) ; on devra élever x_2 à l'exposant 25.
- 25 est impair. On obtient $(x_2)^{25}$ en élevant x_2 au carré, $x_3 = (x_2)^2$ (3ème mult.) ; on devra élever x_3 à l'exposant 12 puis multiplier par x_2 (4ème mult.).

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.
- 50 est pair. On obtient $(x_1)^{50}$ en élevant x_1 au carré, $x_2 = (x_1)^2$ (2ème mult.) ; on devra élever x_2 à l'exposant 25.
- 25 est impair. On obtient $(x_2)^{25}$ en élevant x_2 au carré, $x_3 = (x_2)^2$ (3ème mult.) ; on devra élever x_3 à l'exposant 12 puis multiplier par x_2 (4ème mult.).
- 12 est pair. On obtient $(x_3)^{12}$ en élevant x_3 au carré, $x_4 = (x_3)^2$ (5ème mult.) ; on devra élever x_4 à l'exposant 6.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.
- 50 est pair. On obtient $(x_1)^{50}$ en élevant x_1 au carré, $x_2 = (x_1)^2$ (2ème mult.) ; on devra élever x_2 à l'exposant 25.
- 25 est impair. On obtient $(x_2)^{25}$ en élevant x_2 au carré, $x_3 = (x_2)^2$ (3ème mult.) ; on devra élever x_3 à l'exposant 12 puis multiplier par x_2 (4ème mult.).
- 12 est pair. On obtient $(x_3)^{12}$ en élevant x_3 au carré, $x_4 = (x_3)^2$ (5ème mult.) ; on devra élever x_4 à l'exposant 6.
- 6 est pair. On obtient $(x_4)^6$ en élevant x_4 au carré, $x_5 = (x_4)^2$ (6ème mult.) ; on devra élever x_5 à l'exposant 3.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.
- 50 est pair. On obtient $(x_1)^{50}$ en élevant x_1 au carré, $x_2 = (x_1)^2$ (2ème mult.) ; on devra élever x_2 à l'exposant 25.
- 25 est impair. On obtient $(x_2)^{25}$ en élevant x_2 au carré, $x_3 = (x_2)^2$ (3ème mult.) ; on devra élever x_3 à l'exposant 12 puis multiplier par x_2 (4ème mult.).
- 12 est pair. On obtient $(x_3)^{12}$ en élevant x_3 au carré, $x_4 = (x_3)^2$ (5ème mult.) ; on devra élever x_4 à l'exposant 6.
- 6 est pair. On obtient $(x_4)^6$ en élevant x_4 au carré, $x_5 = (x_4)^2$ (6ème mult.) ; on devra élever x_5 à l'exposant 3.
- 3 est impair. On obtient $(x_5)^3$ en élevant x_5 au carré, (7ème mult.) puis en multipliant par x_5 (8ème mult.).

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Vérifions sur un exemple que l'algorithme est beaucoup plus rapide :

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant x au carré, $x_1 = x^2$ (1ère mult.) ; on devra élever x_1 à l'exposant 50.
- 50 est pair. On obtient $(x_1)^{50}$ en élevant x_1 au carré, $x_2 = (x_1)^2$ (2ème mult.) ; on devra élever x_2 à l'exposant 25.
- 25 est impair. On obtient $(x_2)^{25}$ en élevant x_2 au carré, $x_3 = (x_2)^2$ (3ème mult.) ; on devra élever x_3 à l'exposant 12 puis multiplier par x_2 (4ème mult.).
- 12 est pair. On obtient $(x_3)^{12}$ en élevant x_3 au carré, $x_4 = (x_3)^2$ (5ème mult.) ; on devra élever x_4 à l'exposant 6.
- 6 est pair. On obtient $(x_4)^6$ en élevant x_4 au carré, $x_5 = (x_4)^2$ (6ème mult.) ; on devra élever x_5 à l'exposant 3.
- 3 est impair. On obtient $(x_5)^3$ en élevant x_5 au carré, (7ème mult.) puis en multipliant par x_5 (8ème mult.).

Au total : 8 multiplications, contre 100 pour l'algorithme naïf !

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Une variante de l'algorithme d'exponentiation rapide, utilisant plutôt :

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Une variante de l'algorithme d'exponentiation rapide, utilisant plutôt :

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^{2p} = \left(x^p\right)^2 \quad ; \quad x^{2p+1} = x.x^{2p}$$

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Une variante de l'algorithme d'exponentiation rapide, utilisant plutôt :

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^{2p} = (x^p)^2 \quad ; \quad x^{2p+1} = x.x^{2p}$$

- Ainsi :

$$puissance(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{si n=0} \\ (puissance(x, n/2))^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times (puissance(x,(n-1)/2))^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- Une variante de l'algorithme d'exponentiation rapide, utilisant plutôt :

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^{2p} = (x^p)^2 \quad ; \quad x^{2p+1} = x.x^{2p}$$

- Ainsi :

$$puissance(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{si n=0} \\ (puissance(x, n/2))^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \times (puissance(x,(n-1)/2))^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- Code python :

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n%2==0:
        return puissance(x,n//2) ** 2
    else:
        return x * puissance(x,n//2) ** 2 # ici : n//2 = (n-1)/2
```

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.
- 50 est pair. On obtient x^{50} en élevant au carré x^{25}, soit une multiplication.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.
- 50 est pair. On obtient x^{50} en élevant au carré x^{25}, soit une multiplication.
- 25 est impair. On obtient x^{25} en élevant au carré x^{12} puis en multipliant par x, soit 2 multiplications.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.
- 50 est pair. On obtient x^{50} en élevant au carré x^{25}, soit une multiplication.
- 25 est impair. On obtient x^{25} en élevant au carré x^{12} puis en multipliant par x, soit 2 multiplications.
- 12 est pair. On obtient x^{12} en élevant au carré x^{6}, soit une multiplication.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.
- 50 est pair. On obtient x^{50} en élevant au carré x^{25}, soit une multiplication.
- 25 est impair. On obtient x^{25} en élevant au carré x^{12} puis en multipliant par x, soit 2 multiplications.
- 12 est pair. On obtient x^{12} en élevant au carré x^{6}, soit une multiplication.
- 6 est pair. On obtient x^{6} en élevant au carré x^{3}, soit une multiplication.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.
- 50 est pair. On obtient x^{50} en élevant au carré x^{25}, soit une multiplication.
- 25 est impair. On obtient x^{25} en élevant au carré x^{12} puis en multipliant par x, soit 2 multiplications.
- 12 est pair. On obtient x^{12} en élevant au carré x^6, soit une multiplication.
- 6 est pair. On obtient x^6 en élevant au carré x^3, soit une multiplication.
- 3 est impair. On obtient x^3 en élevant x au carré puis en multipliant par x.

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

Exemple calcul de x^{100} :

- 100 est pair. On obtient x^{100} en élevant au carré x^{50}, soit une multiplication.
- 50 est pair. On obtient x^{50} en élevant au carré x^{25}, soit une multiplication.
- 25 est impair. On obtient x^{25} en élevant au carré x^{12} puis en multipliant par x, soit 2 multiplications.
- 12 est pair. On obtient x^{12} en élevant au carré x^6, soit une multiplication.
- 6 est pair. On obtient x^6 en élevant au carré x^3, soit une multiplication.
- 3 est impair. On obtient x^3 en élevant x au carré puis en multipliant par x.

Au total : 8 multiplications, contre 100 pour l'algorithme naïf !

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

- On démontre que l'algorithme d'exponentiation rapide a une complexité logarithmique (d'ordre $\Theta(\log(n))$).

Autre exemple : l'algorithme d'exponentiation rapide

• On démontre que l'algorithme d'exponentiation rapide a une complexité logarithmique (d'ordre $\Theta(\log(n))$).

• Exercice* :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x et $\log_2$ le logarithme base 2, i.e. $y = \log_2(x) \iff 2^y = x$.)

   Justifier que :

   $$2^p \leqslant n < 2^{p+1}$$

2. Montrons par récurrence sur p que lorsque $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$, alors il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide.

3. En déduire que l'algorithme d'exponentiation rapide a pour complexité $\Theta(\log(n))$.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
   Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
     Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.
  2. Montrons par récurrence sur p qu'il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide :

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
     Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.
  2. Montrons par récurrence sur p qu'il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide :

     Initialisation. Si $p = 0$: $1 \leqslant n < 2$, et le calcul de $x^n = x$ par l'algorithme d'exponentiation rapide nécessite une multiplication. Vrai au rang 0.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
     Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.
  2. Montrons par récurrence sur p qu'il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide :

     Initialisation. Si $p = 0$: $1 \leqslant n < 2$, et le calcul de $x^n = x$ par l'algorithme d'exponentiation rapide nécessite une multiplication. Vrai au rang 0.

     Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang p et supposons que $2^{p+1} \leqslant n < 2^{p+2}$.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
     Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.
  2. Montrons par récurrence sur p qu'il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide :

     Initialisation. Si $p = 0$: $1 \leqslant n < 2$, et le calcul de $x^n = x$ par l'algorithme d'exponentiation rapide nécessite une multiplication. Vrai au rang 0.

     Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang p et supposons que $2^{p+1} \leqslant n < 2^{p+2}$. L'algorithme obtient x^n en : élévant x au carré x^2 (1 multiplication), puis en élevant x^2 à la puissance $\lfloor n/2 \rfloor$, puis éventuellement en multipliant par x ($\leqslant 1$ multiplication).

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
     Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.
  2. Montrons par récurrence sur p qu'il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide :

     Initialisation. Si $p = 0$: $1 \leqslant n < 2$, et le calcul de $x^n = x$ par l'algorithme d'exponentiation rapide nécessite une multiplication. Vrai au rang 0.

     Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang p et supposons que $2^{p+1} \leqslant n < 2^{p+2}$. L'algorithme obtient x^n en : élévant x au carré x^2 (1 multiplication), puis en élevant x^2 à la puissance $\lfloor n/2 \rfloor$, puis éventuellement en multipliant par x ($\leqslant 1$ multiplication).
     Or $2^p \leqslant \lfloor n/2 \rfloor < 2^{p+1}$. Par hypothèse de récurrence l'élévation à la puissance $\lfloor n/2 \rfloor$ par exponentiation rapide nécessite entre p et $2(p+1)$ multiplications,

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

- Montrons que sa complexité est logarithmique :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
   Puisque : $2^{\log_2(n)} = n$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, alors : $\boxed{2^p \leqslant n < 2^{p+1}}$.

2. Montrons par récurrence sur p qu'il faut entre p et $2.(p+1)$ multiplications pour le calcul de de x^n par l'algorithme d'exponentiation rapide :

   Initialisation. Si $p = 0$: $1 \leqslant n < 2$, et le calcul de $x^n = x$ par l'algorithme d'exponentiation rapide nécessite une multiplication. Vrai au rang 0.

   Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang p et supposons que $2^{p+1} \leqslant n < 2^{p+2}$. L'algorithme obtient x^n en : élévant x au carré x^2 (1 multiplication), puis en élevant x^2 à la puissance $\lfloor n/2 \rfloor$, puis éventuellement en multipliant par x ($\leqslant 1$ multiplication).
   Or $2^p \leqslant \lfloor n/2 \rfloor < 2^{p+1}$. Par hypothèse de récurrence l'élévation à la puissance $\lfloor n/2 \rfloor$ par exponentiation rapide nécessite entre p et $2(p+1)$ multiplications, donc celui de x^n nécessite entre $p+1$ et $2(p+1)+2 = 2(p+2)$ multiplications. cqfd.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

3. Le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme a même ordre que le nombre de multiplications effectuées (au plus 2 tests par multiplication).

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

3. Le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme a même ordre que le nombre de multiplications effectuées (au plus 2 tests par multiplication).

D'après la question précédente, le calcul de x^n nécessite :

au moins : $p = (\lfloor \log_2(n) \rfloor \geqslant \log_2(n) - 1 = \dfrac{\log(n)}{\log(2)} - 1$ multiplications,

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

3. Le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme a même ordre que le nombre de multiplications effectuées (au plus 2 tests par multiplication).

D'après la question précédente, le calcul de x^n nécessite :

au moins : $p = (\lfloor \log_2(n) \rfloor \geqslant \log_2(n) - 1 = \dfrac{\log(n)}{\log(2)} - 1$ multiplications,

au plus : $2(p+1) = 2(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1) \leqslant 2\log_2(n) + 2 = 2\dfrac{\log(n)}{\log(2)} + 2$ multiplications.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

3. Le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme a même ordre que le nombre de multiplications effectuées (au plus 2 tests par multiplication).

D'après la question précédente, le calcul de x^n nécessite :

au moins : $p = (\lfloor \log_2(n) \rfloor \geqslant \log_2(n) - 1 = \dfrac{\log(n)}{\log(2)} - 1$ multiplications,

au plus : $2(p+1) = 2(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1) \leqslant 2\log_2(n) + 2 = 2\dfrac{\log(n)}{\log(2)} + 2$ multiplications.

Donc la la complexité est en $\Theta(\log(n))$.

Complexité de l'algorithme d'exponentiation rapide

3. Le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme a même ordre que le nombre de multiplications effectuées (au plus 2 tests par multiplication).

D'après la question précédente, le calcul de x^n nécessite :

au moins : $p = (\lfloor \log_2(n) \rfloor \geqslant \log_2(n) - 1 = \dfrac{\log(n)}{\log(2)} - 1$ multiplications,

au plus : $2(p+1) = 2(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1) \leqslant 2\log_2(n) + 2 = 2\dfrac{\log(n)}{\log(2)} + 2$ multiplications.

Donc la la complexité est en $\Theta(\log(n))$.

Exemple : l'exponentiation rapide de x^{2^p} :

$$x^{2^p} = \underbrace{(\cdots((x^2)^2)^2\cdots)^2}_{p \text{ élévations au carré}}$$

nécessite p multiplications (une pour chaque élévation au carré).