Mathématiques

Devoir à la maison

à rendre pour le mercredi 10 novembre

Exercice 1. Fonctions cotangente

On considère la fonction "cotangente" : $x \mapsto \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

- a) Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_{\cotan}$.
b) Montrer que cotan est dérivable sur $\mathcal{D}_{\cotan}$ et que :

$$\cotan' = -\frac{1}{\sin^2} = -1 - \cotan^2$$

- c) Montrer que cotan est impaire et admet pour période π .
d) Dresser le tableau de variation de cotan sur l'intervalle $]0; \pi[$ et calculer les limites aux bornes de l'intervalle.
e) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\cotan}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$, puis étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente lorsque x décrit l'intervalle $]0; \pi[$.
f) Tracer l'allure de la courbe représentative de cotan.

Exercice 2.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

le chiffre 2 apparaissant n fois en tout dans le membre de gauche.

Indication. Dédurre de la formule donnant $\cos(2x)$, l'expression de $\cos \frac{x}{2}$ en fonction de $\cos(x)$ lorsque $x \in]-\pi; +\pi[$.

En déduire les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ pour $x = \frac{\pi}{8}$ puis pour $x = \frac{\pi}{16}$.