Exercice 1

a) Les fonctions cos et sin étant définies sur $\mathbb{R}$, $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est définie pour tout x tel que $\sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur :

$$\mathscr{D} = \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\pi\,;\,(k+1)\pi\right[.$$

b) Comme quotient de fonctions dérivables, cotan est dérivable sur son domaine de définition. De plus :

$$\begin{aligned}\text{cotan}'(x) &= \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)}\\ &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}\\ &= -\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{cotan}' = -\frac{1}{\sin^2} = -1 - \text{cotan}^2}$$

c) La fonction cos est paire, et la fonction sin est impaire ; leur quotient, cotan est donc impaire.

Montrons que cotan est π-périodique.

D'abord $x \in \mathscr{D}$ si et seulement si $x \not\equiv 0\ [\pi]$ si et seulement si $x + \pi \not\equiv 0\ [\pi]$ si et seulement si $x + \pi \in \mathscr{D}$.

Ensuite, $\text{cotan}(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \dfrac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{cotan}(x)$.

Ainsi, la fonction cotan est π-périodique.

d) Sur $]0;\pi[$, $\text{cotan}'(x) = -1 - \text{cotan}^2(x) < 0$ et donc cotan est strictement décroissante. Calculons ses limites aux bornes.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x) = 0^+\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \cos = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to \pi^-} \sin(x) = 0^+\\ \lim\limits_{x\to \pi^-} \cos = -1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$$

et $\text{cotan}(\pi/2) = 0$; d'où le tableau de variations de cotan sur $]0;\pi[$:

x	0		$\pi/2$		π
cotan'	‖		$+$		‖
cotan	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖

e) L'équation de la tangente à la courbe de cotan au point d'abscisse $\pi/2$ est donnée par :

$$y = \text{cotan}'(\pi/2)(x - \pi/2) + \text{cotan}(\pi/2)$$

soit, puisque $\text{cotan}'(\pi/2) = -1$ et $\text{cotan}(\pi/2) = 0$:

$$\boxed{y = \pi/2 - x}.$$

Étudions la position de la courbe par rapport à cette tangente lorsque $x \in \,]0;\pi[$; pour cela il faut étudier le signe de $f(x) = \text{cotan}(x) - (\pi/2 - x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0;\pi[$.

La fonction f est dérivable, de dérivée :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sin^2(x)}$$

et donc

$$f'(x) \leq 0 \iff \frac{1}{\sin^2(x)} \geq 1 \iff \sin^2(x) \leq 1$$

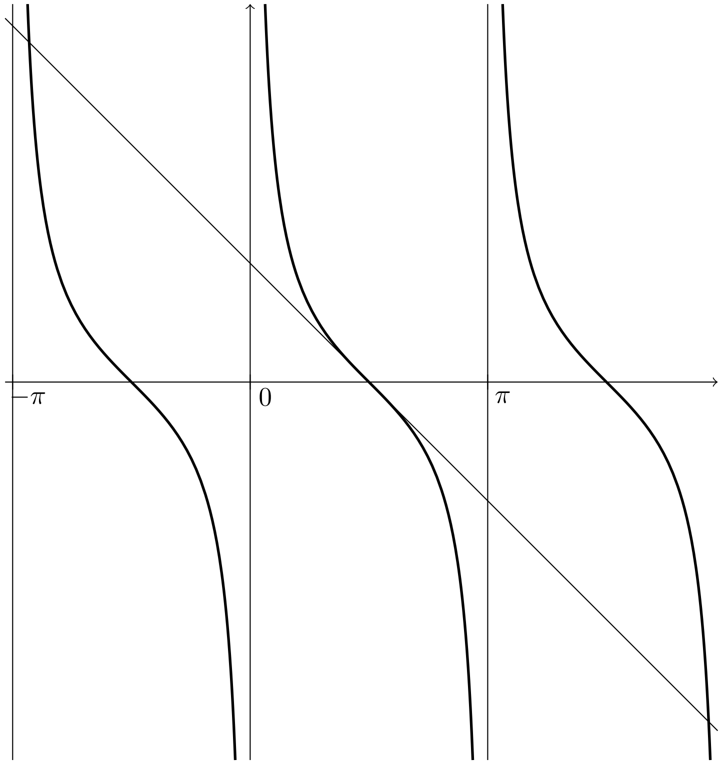
De plus $f'(x) = 0 \iff \sin^2(x) = 1 \underset{x\in]0;\pi[}{\iff} x = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0;\pi[$. De plus $f(\pi/2) = 0$, d'où le tableau de variation de f et son signe sur l'intervalle :

x	0		$\pi/2$		π
f'	‖	$-$	0	$-$	‖
f	‖	↘	0	↘	‖
f	‖	$+$	0	$-$	‖

Ainsi la courbe est au dessus de sa tangente aux abscisses $x \in]0;\pi/2[$ et au-dessous aux abscisses $x \in]\pi/2;\pi[$.

e) Tracé de la courbe représentative :



Exercice 2

Nous allons établir la propriété par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la proposition de récurrence, $\mathscr{P}(n)$:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Initialisation. Pour $n = 1$:

$$2\cos\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ .$$

Ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Pour cela exprimons $\cos\frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$. À partir de la formule : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \implies \cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

En posant $x = 2a$:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Et si $x \in]-\pi;\pi]$, alors $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\frac{x}{2} \geqslant 0$. Ainsi on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-\pi;\pi],\ \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} \qquad (1)$$

Revenons à la preuve de $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence on a :

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$

Or $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in]-\pi;\pi]$, et donc, d'après (1) :

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \sqrt{\frac{4+4\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$\underset{HR}{=} \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{2 \text{ apparaît } n+1 \text{ fois}}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vrai.

D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ es vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

En particulier pour $n = 2$:

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

et puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \pi$, $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$; ainsi de $\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$ on en retire :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Ainsi :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2} = \boxed{\sqrt{2}-1}$$

Pour $n = 3$:

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \boxed{\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

et puisque $0 < \frac{\pi}{16} < \pi$, $\sin\frac{\pi}{16} \geq 0$; ainsi de $\cos^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{\pi}{16} = 1$ on en retire :

$$\sin\frac{\pi}{16} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{16}} = \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Ainsi :

$$\tan\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{4-(2+\sqrt{2})}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

(on pourrait continuer la simplification en multipliant en haut et en bas par le radical conjugué...2 fois encore jusqu'à n'avoir plus aucune racine carrée au dénominateur.)