Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1

Mathématiques
Devoir à la maison

à rendre pour le 18 février 2022

Exercice 1.

On considère E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, formé des matrices du type :
$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ est un réel.

1. Montrer que E est stable pour la multiplication matricielle (c'est-à-dire que le produit de deux éléments de E est encore un élément de E). L'est-il pour l'addition ?
2. Montrer que ${}^tM(\theta) = M(-\theta) = (M(\theta))^{-1}$.
3. Prouver que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.
4. Exprimer de deux façons $(M(\theta) + M(-\theta))^n$ et en déduire :

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k-n)\theta \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(2k-n)\theta = 0$$

Exercice 2.

1. Soit un entier $n \geqslant 2$, et le polynôme $P = X^n - 1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le nombre complexe $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine de P.
   (b) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $i \neq j \implies \omega_i \neq \omega_j$.
   (c) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soient un entier $n \geqslant 2$, et le polynôme $Q = (X+1)^n - 1$.
   (a) Déterminer toutes les racines de Q dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) On note R la polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q = XR$; en exprimant R de deux façons, calculer deux expressions de $R(0)$, puis en déduire la valeur du réel A défini par $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.