

Exercice 1

1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(\theta) \times M(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' \\ -\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & \sin(\theta + \theta') \\ -\sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = M(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Ainsi E est stable par multiplication : $\forall (M, M') \in E^2, M \times M' \in E$.

E n'est pas stable par addition : contre-exemple :

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies M(0) + M(0) = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Or $2I \notin E$ puisque $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta \leq 1 < 2$.

2.

$${}^t M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\theta & \sin -\theta \\ -\sin -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix} = M(-\theta)$$

Or d'après 1), $M(\theta) \times M(-\theta) = M(\theta - \theta) = M(0) = I_2$.

Donc $M(\theta)^{-1} = M(-\theta)$.

3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(\theta)^n = M(n\theta)$. Par récurrence sur n .

(I). Pour $n = 0$: $M^0 = I_2$ et $M(0) = I_2$. L'hypothèse est vraie au rang 0.

(H). Supposons l'hypothèse vraie au rang n .

$$\begin{aligned} M(\theta)^{n+1} &= M(\theta)^n \times M(\theta) \\ &\stackrel{HR}{=} M(n\theta) \times M(\theta) \\ &= M(n\theta + \theta) \\ &\stackrel{(1)}{=} M((n+1)\theta) \end{aligned}$$

4. D'une part :

$$(M(\theta) + M(-\theta))^n = (M(\theta) + {}^t M(\theta))^n = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 2 \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n \cos^n \theta & 0 \\ 0 & 2^n \cos^n \theta \end{pmatrix}$$

D'autre part, puisque $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ commutent (puisque $M(-\theta) = M(\theta)^{-1}$), d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (M(\theta) + M(-\theta))^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M(\theta)^k \times M(-\theta)^{n-k} \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M(k\theta) \times M((n-k)\theta) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M((2k-n)\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \begin{pmatrix} \cos(2k-n)\theta & \sin(2k-n)\theta \\ -\sin(2k-n)\theta & \cos(2k-n)\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k-n)\theta & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(2k-n)\theta \\ -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(2k-n)\theta & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k-n)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut donc déduire des deux expressions obtenues que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k-n)\theta = 2^n \cos^n \theta \quad ; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(2k-n)\theta = 0$$

En particulier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k-n)\theta$$

Exercice 2

1. Soit le polynôme $P = X^n - 1$ avec $n \geq 2$.

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\omega_k = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

$$P(\omega_k) = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n - 1 = e^{2i\pi} - 1 = 1 - 1 = 0$$

donc ω_k est une racine de P .

(b) Soit $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et supposons que $\omega_i = \omega_j$. Alors :

$$\begin{aligned} e^{\frac{2ii\pi}{n}} &= e^{\frac{2ij\pi}{n}} \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{2i\pi}{n} &= \frac{2j\pi}{n} + 2k\pi \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2i\pi &= 2j\pi + 2n \times k\pi \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z}, i &= j + n \times k \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z}, i - j &= n \times k \end{aligned}$$

Donc $\omega_i = \omega_j$ ssi $i - j$ est un multiple de n .

Mais puisque $0 \leq i, j \leq n-1$, on a :

$$-(n-1) \leq i - j \leq n-1$$

et $i - j$ est un multiple de n . Or le seul multiple de n dans $\llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$ est 0. Donc nécessairement $k = 0$ et donc $i = j$. Ainsi :

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \omega_i = \omega_j \implies i = j.$$

Le résultat demandé en est la contraposée.

(c) Le polynôme P est de degré n , et donc admet au plus n racines distinctes. Or $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sont n racines distinctes de P ; ce sont donc toutes les racines de P . Ainsi on a la factorisation suivante de P dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = 1 \times \prod_{i=0}^{n-1} (X - \omega_i) = (X - \omega_0) \times (X - \omega_1) \times \dots \times (X - \omega_{n-1})$$

(puisque 1 est le coefficient de plus haut degré de P).

2. (a) Soit $Q = (X+1)^n - 1$ avec $n \geq 2$. On a $\forall x \in \mathbb{C}, Q(x) = P(x+1)$ donc on en déduit la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = \prod_{i=0}^{n-1} (X+1 - \omega_i) = (X+1 - \omega_0) \times (X+1 - \omega_1) \times \dots \times (X+1 - \omega_{n-1})$$

(b) Or $\omega_0 = e^{\frac{0}{n}} = e^0 = 1$. Donc on peut simplifier la factorisation de Q par :

$$Q = X \times \underbrace{(X+1 - \omega_1) \times \dots \times (X+1 - \omega_{n-1})}_{=R}$$

Ainsi :

$$R = \prod_{k=1}^{n-1} (X+1 - \omega_k) = (X+1 - \omega_1) \times (X+1 - \omega_2) \times \dots \times (X+1 - \omega_{n-1})$$

et donc :

$$\begin{aligned} R(0) &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = (1 - \omega_1) \times (1 - \omega_2) \times \dots \times (1 - \omega_{n-1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \times (-2i) \sin \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

d'après la méthode de l'angle médian.

$$\begin{aligned} R(0) &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \times \prod_{k=1}^{n-1} (-2i) \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= \exp \left(\frac{i\pi}{n} \times \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \times (-2i)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= \exp \left(\frac{i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} \right) \times (-2i)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= \exp \left(\frac{i(n-1)\pi}{2} \right) \times (-2i)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= i^{n-1} \times (-2i)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= 2^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

C'est la première expression de $R(0)$. Pour l'obtention de la deuxième, on

développe Q à l'aide de la formule du binôme :

$$\begin{aligned} Q &= (X+1)^n - 1 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) - 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^k \\ &= X \times \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^{k-1} \\ \implies R &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^{k-1} \\ \implies R(0) &= \binom{n}{1} = n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$