Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1

Mathématiques
Devoir à la maison

pour le vendredi 13 mai 2022

Problème. Partie 1 :

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1 et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable l'une des lettres a, b et c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

A la suite du tirage d'une des lettres, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case.
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case.
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On appelle *opération* le tirage d'une lettre au hasard et le déplacement éventuel des jetons consécutif à ce tirage. n désigne un entier naturel quelconque.

On note p_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0.

On note q_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A se trouve dans C_0 et B dans C_1.

On note r_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A se trouve dans C_1 et B dans C_0.

On note t_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_1.

On note $A_{0,n}$ l'événement : "le jeton A se trouve dans la case C_0 à l'issue de la n-ième opération".

On note $A_{1,n}$ l'événement : "le jeton A se trouve dans la case C_1 à l'issue de la n-ième opération".

On note $B_{0,n}$ l'événement : "le jeton B se trouve dans la case C_0 à l'issue de la n-ième opération".

On note $B_{1,n}$ l'événement : "le jeton B se trouve dans la case C_1 à l'issue de la n-ième opération".

On a donc $p_n = \Pi(A_{0,n} \cap B_{0,n})$

1. Exprimer de la même façon q_n, r_n et t_n comme probabilité d'un événement défini à l'aide des événements précédents.
2. Calculer p_n, q_n, r_n et t_n, pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et t_n.
   Calculer de même q_{n+1}, r_{n+1} et t_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et t_n.
4. On note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice R de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = R\,X_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
5. En déduire que $X_n = R^n\,X_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Partie 2 :

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices U^n et V^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $(U - V)^n = \dfrac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right) U + (-1)^n V^n$
3. Vérifier que $R = \frac{1}{3}(U - V)$
4. En déduire X_n en fonction de n dans $\mathbb{N}^*$, puis p_n, q_n, r_n et t_n en fonction de n dans $\mathbb{N}^*$.