

Partie I.

1) On a de même :

$$q_n = \Pi(A_{0,n} \cap B_{1,n}) \quad ; \quad r_n = \Pi(A_{1,n} \cap B_{0,n}) \quad ; \quad t_n = \Pi(A_{1,n} \cap B_{1,n})$$

2)

$$p_0 = 1, \quad q_0 = r_0 = t_0 = 0$$

Soit a_i, b_i et c_i les évènements : "au i -ième tir on a obtenu la lettre 'a' (respectivement 'b' et 'c')".

$$p_1 = \Pi(c_1) = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \Pi(b_1) = \frac{1}{3}, \quad r_1 = \Pi(a_1) = \frac{1}{3}, \quad t_1 = \Pi(\emptyset) = 0$$

3) En appliquant la formule des probabilités totales avec le S.C.E. : $A_{0,n} \cap B_{0,n}$, $A_{0,n} \cap B_{1,n}$, $A_{1,n} \cap B_{0,n}$, $A_{1,n} \cap B_{1,n}$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \Pi(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \\ &= \Pi((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{0,n} \cap B_{0,n})) + \Pi((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{0,n} \cap B_{1,n})) \\ &\quad + \Pi((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{1,n} \cap B_{0,n})) + \Pi((A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1}) \cap (A_{1,n} \cap B_{1,n})) \\ &= \Pi(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{0,n} \cap B_{0,n}) \times \Pi(A_{0,n} \cap B_{0,n}) \\ &\quad + \Pi(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{0,n} \cap B_{1,n}) \times \Pi(A_{0,n} \cap B_{1,n}) \\ &\quad + \Pi(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{1,n} \cap B_{0,n}) \times \Pi(A_{1,n} \cap B_{0,n}) \\ &\quad + \Pi(A_{0,n+1} \cap B_{0,n+1} / A_{1,n} \cap B_{1,n}) \times \Pi(A_{1,n} \cap B_{1,n}) \\ &= \Pi(c_n) \times p_n + \Pi(b_n) \times q_n + \Pi(a_n) \times r_n + \Pi(\emptyset) \times t_n \end{aligned}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n$$

Le même calcul donne :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}t_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n \\ t_{n+1} &= \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n \end{aligned}$$

4) On a donc :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=R} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

5) Par une récurrence immédiate, on déduit de $X_{n+1} = R \times X_n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = R^n \times X_0$.

Partie II.

1) Le calcul donne $U^2 = 4.U$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U^n = 4^{n-1}.U$.

Le calcul donne $V^2 = I$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V^n = \begin{cases} V & \text{si } n \text{ est impair} \\ I & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2) On vérifie aisément que U et V commutent : $UV = VU$; on peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (U - V)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^{n-k} (-V)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} U^{n-k} (-V)^k + I \times (-V)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 4^{n-k-1} U \times (-1)^k V^k + (-1)^n V^n \end{aligned}$$

Par ailleurs, le calcul donne $U \times V = U$, ainsi :

$$\begin{aligned}
 (U - V)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k 4^{n-k-1} U + (-1)^n V^n \\
 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 4^{n-k} - (-1)^n \right) U + (-1)^n V^n \\
 &= \frac{1}{4} ((4-1)^n - (-1)^n) \cdot U + (-1)^n V^n \\
 &= \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \cdot U + (-1)^n V^n
 \end{aligned}$$

3) Le calcul donne immédiatement $R = \frac{1}{3}(U - V)$.

4) On a donc

$$X_n = R^n X_0 = \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \cdot U + (-1)^n V^n \right) X_0$$

$$\text{Ainsi, si } n \text{ est pair : } \begin{cases} p_n = \frac{3^n + 3}{4 \times 3^n} \\ q_n = \frac{3^n - 1}{4 \times 3^n} \\ r_n = \frac{3^n - 1}{4 \times 3^n} \\ t_n = \frac{3^n - 1}{4 \times 3^n} \end{cases} \quad \text{et si } n \text{ est impair : } \begin{cases} p_n = \frac{3^n + 1}{4 \times 3^n} \\ q_n = \frac{3^n + 1}{4 \times 3^n} \\ r_n = \frac{3^n + 1}{4 \times 3^n} \\ t_n = \frac{3^n - 3}{4 \times 3^n} \end{cases}$$