Lycée Fénelon BCPST1
Année 2020-21

# Mathématiques
# Devoir surveillé n° 1

Samedi 3 octobre 2020

Durée : 3 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.
***L'usage des calculatrices est interdit.***

## Exercice 1. *Encadrement et inégalité triangulaire*

On considère deux nombres réels $a$ et $b$ vérifiant : $2 \leqslant |a| \leqslant 3$ et $1 \leqslant |b| \leqslant 2$.

Appliquer l'inégalité triangulaire pour obtenir un encadrement de : $|3a - 2b|$.

## Exercice 2. *Logique et raisonnement*

Pour chacune des 3 propositions suivantes :

1. $$P_1 \equiv \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z},\ x \leq n$$

2. $$P_2 \equiv \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x^2 = y^2 \implies x = y)$$

3. $$P_3 \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x^2 = y^2 \implies x = y)$$

que l'on désigne maintenant par $P$ :

a) Écrire la négation $\neg P$.

b) Laquelle des propositions $P$, $\neg P$ est-elle vraie ? La démontrer.

## Exercice 3 : *Quelques récurrences.*

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 7 \\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 5^n$.

## Exercice 4. *Équations et inéquations*

**1)** Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble $\mathscr{S}_m$ des solutions ; on dicutera en fonction des valeurs du paramètre $m$.

**a)** L'équation d'inconnue $x$ où $m$ est un paramètre réel :

$$x^2 + 1 = mx$$

À résoudre dans $\mathbb{C}$.

**b)** Le système d'inconnues $x, y$ où $m$ est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + y = -m - 1 \\ x \times y = m \end{cases}$$

À résoudre dans $\mathbb{R}$.

**2)** Résoudre les inéquations suivantes :

**a)** $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.

**b)** $|x+1| \leqslant \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

## Exercice 5. *Une fonction à valeurs entières*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$, puis $f\left(\sqrt{3} - 1\right)$.
3. Déterminer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis pour tout entier relatif $n$ strictement négatif.
4. (a) $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs quelconques, tels que $a \leq b$.
   Comparer $f(a)$ et $f(b)$. Que peut-on en déduire concernant la fonction $f$ ?

   (b) Que dire dans le cas où $a$ et $b$ sont tous deux strictement négatifs ?
5. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $f(x) = \sqrt{2}$.

   (b) $f(x) = 1$.

   (c) $f(x) = 0$.

   (d) $f(x) = k$ où $k$ désigne un entier relatif quelconque.
6. En déduire que la fonction $f$ est constante par intervalles.
7. Représenter une allure de la courbe de la fonction $f$ en tenant compte de tous les résultats précédents.

## **Problème.** *Encadrements de* $\sin(x)$, $\cos(x)$ *et limites usuelles*

Le but de l'exercice est de déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

1. On établit dans cette partie la première limite.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a l'encadrement :
   $$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
   (c) Établir un encadrement analogue de $\sin(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_-$.
   (d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{x}$ puis conclure.
2. On établit dans cette partie la deuxième limite.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a l'encadrement :
   $$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
   (b) Établir un encadrement analogue de $\cos(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire un encadrement de $1-\cos(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$, puis la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.