Exercice 1

Soit a et b vérifiant : $2 \leqslant |a| \leqslant 3$ et $1 \leqslant |b| \leqslant 2$. Appliquons l'inégalité triangulaire pour encadrer $|3a-2b|$:

• On applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &||3a|-|2b|| \leqslant |3a-2b| \leqslant |3a|+|2b| \\ \iff &|3|a|-2|b|| \leqslant |3a-2b| \leqslant 3|a|+2|b| \end{aligned}$$

D'une part (majoration) : $3|a|+2|b| \leqslant 3\times 3+2\times 2 = 13$.
D'autre part (minoration) :

$$\begin{aligned} &6 \leqslant 3|a| \leqslant 9 \text{ et } -4 \leqslant -2|b| \leqslant -2 \\ \implies &2 \leqslant 3|a|-2|b| \leqslant 7 \\ \implies &2 \leqslant |3|a|-2|b|| \leqslant 7 \\ \implies &2 \leqslant |3|a|-2|b|| \end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement de $|3a-2b|$:

$$\begin{aligned} &2 \leqslant |3|a|-2|b|| \leqslant |3a-2b| \leqslant 3|a|+2|b| \leqslant 13 \\ \implies &\boxed{2 \leqslant |3a-2b| \leqslant 13} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) La négation de P_1 est :

$$\boxed{\neg P_1 \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x > n}$$

   (b) C'est la proposition P_1 qui est vraie. Montrons-la :
   Soit x un réel quelconque. Il s'agit de montrer l'existence de $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq n$. Il suffit de prendre $n = \lfloor x \rfloor + 1$. En effet, par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ et $x < \lfloor x \rfloor + 1$ ce qui implique que $x \leq \lfloor x \rfloor + 1$.

2. (a) La négation de P_2 est :

$$\boxed{\neg P_2 \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2 \wedge x \neq y)}$$

   (b) C'est la proposition $\neg P_2$ qui est vraie. Montrons-la : en prenant $x = 1$ et $y = -1$, on a $x^2 = y^2 = 1$ et $x \neq y$.

3. (a) La négation de P_3 est :

$$\boxed{\neg P_3 \equiv \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2 \wedge x \neq y)}$$

   (b) C'est la proposition P_3 qui est vraie. Montrons-la : prenons $x = 0$ et y un réel quelconque, et supposons que $x^2 = y^2$; alors $y^2 = 0$, et donc par intégrité de $\times$, nécessairement $y = 0$, c'est-à-dire $x = y$.

Exercice 3

1) Procédons par récurrence avec pour assertion de récurrence :

$$\mathscr{P}(n) \equiv \quad 2^n \geq n^2.$$

Initialisation. Pour $n = 4$, $2^n = 2^4 = 16$ et $n^2 = 4^2 = 16$. Ainsi $\mathscr{P}(4)$ est vraie.
Hérédité. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un entier $n \geq 4$: $2^n \geq n^2$. Alors :

$$2^{n+1} = 2\times 2^n \geq 2\times n^2$$

Montrons alors que $2\times n^2 \geq (n+1)^2$:

$$2\times n^2 \geq (n+1)^2 \iff 2n^2 \geq n^2+2n+1 \iff n^2-2n-1 \geq 0.$$

Le trinôme n^2-2n-1 a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8 > 0$ et deux racines réelles : $\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$; il est positif à l'extérieur de ses 2 racines. Or puisque $n \geq 4$ et que :

$$4 \geq 1+\sqrt{2} \iff 3 \geq \sqrt{2} \iff 9 \geq 2 \text{ ce qui est vrai}$$

on a bien :

$$2^{n+1} \geq 2\times n^2 \geq (n+1)^2.$$

En particulier, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 4,\ 2^n \geq n^2}$.

2) Procédons par une récurrence à deux pas, avec pour assertion de récurrence :

$$\mathscr{P}(n) \equiv \quad u_n = 2^n + 5^n.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $2^0 + 5^0 = 1 + 1 = 2$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vrai.
Pour $n = 1$, $u_1 = 7$ et $2^1 + 5^1 = 2 + 5 = 7$. Ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vrai.
Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vrais pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 7u_{n+1} - 10u_n \\ &\underset{H.R.}{=} 7 \times (2^{n+1} + 5^{n+1}) - 10 \times (2^n + 5^n) \\ &= (7 \times 2 - 10) \times 2^n + (7 \times 5 - 10) \times 5^n \\ &= 4 \times 2^n + 25 \times 5^n \\ &= 2^2 \times 2^n + 5^2 \times 5^n \\ &= 2^{n+2} + 5^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+2)$ est vrai.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 5^n}$.

Exercice 4

1. (a) On a

$$x^2 + 1 = mx \iff x^2 - mx + 1 = 0$$

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ \Delta = 0 &\iff m \in \{-2, 2\} \\ \Delta < 0 &\iff m \in]-2, 2[\end{aligned}$$

Considérons 3 cas :

• Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Il y a deux solutions réelles distinctes, $\dfrac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[,\ \mathscr{S}_m = \left\{\frac{m - \sqrt{m^2-4}}{2}; \frac{m + \sqrt{m^2-4}}{2}\right\}}$$

• Si $m \in \{-2, 2\}$.

Il y a une solution réelle, $\dfrac{m}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } m \in \{-2, 2\},\ \mathscr{S}_m = \left\{\frac{m}{2}\right\}}$$

• Si $m \in]-2, 2[$.

Il y a deux solutions complexes conjuguées, $\dfrac{m \pm \mathrm{i}\sqrt{4-m^2}}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } m \in]-2, 2[,\ \mathscr{S}_m = \left\{\frac{m - \mathrm{i}\sqrt{4-m^2}}{2}; \frac{m + \mathrm{i}\sqrt{4-m^2}}{2}\right\}}$$

(b) Un couple (x, y) de réels est solution du système :

$$\begin{cases} x + y = -m - 1 \\ x \times y = m \end{cases}$$

si et seulement x et y sont les deux racines réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité du trinôme $x^2 + (m+1)x + m$. Il a pour discriminant

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0.$$

On considère deux cas :

• Si $m = 1$.
Alors $\Delta = 0$ et $x = y = -\dfrac{m+1}{2} = -1$. Il y a un seul couple solution :

$$\boxed{\text{Si } m = 1,\ \mathscr{S}_m = \left\{\left(-\frac{m+1}{2}, -\frac{m+1}{2}\right)\right\} = \{(-1, -1)\}}$$

• Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Alors $\Delta > 0$ et les solutions du trinôme sont les deux réels :

$$\frac{-m - 1 \pm \sqrt{(m-1)^2}}{2} = \frac{-m - 1 \pm |m-1|}{2}.$$

Il y a deux couples solutions : Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\boxed{\mathscr{S}_m = \left\{\left(\frac{-m-1-|m-1|}{2}, \frac{-m-1+|m-1|}{2}\right); \left(\frac{-m-1+|m-1|}{2}, \frac{-m-1-|m-1|}{2}\right)\right\}}$$

On pourrait en dire plus :

$$\text{Si } m>1 : \mathscr{S}_m = \{(-m,-1);(-1,-m)\}$$
$$\text{Si } m<1 : \mathscr{S}_m = \{(-m,-1);(-1,-m)\}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R}\setminus\{1\} : \mathscr{S}_m = \{(-m,-1);(-1,-m)\}}$$

2. (a) On considère l'inéquation : $x-1 \leq \sqrt{x+2}$. Elle est bien définie dès que $x+2 \geq 0$ c'est-à-dire pour $x \in [-2,+\infty[$. On considère deux cas selon que $x-1<0$ ou $x-1 \geq 0$.

• Si $x \in [-2;1[$. Alors $x-1<0 \leq \sqrt{x+2}$. Ainsi tous les réels dans l'intervalle $[-2;1[$ sont solutions.

• Si $x \in [1,+\infty[$. Alors $x-1 \geq 0$; les deux termes de l'inégalité sont positifs, on obtient donc une inéquation équivalente en élevant chaque terme au carré :

$$x-1 \leq \sqrt{x+2} \iff (x-1)^2 \leq \sqrt{x+2}^2 \iff x^2-2x+1 \leq x+2 \iff x^2-3x-1 \leq 0.$$

Étudions le signe de ce trinôme ; son discriminant est $\Delta = 9+4 = 13 > 0$ et ses racines sont $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. Le trinôme est négatif entre ses deux racines, or

$$\frac{3-\sqrt{13}}{2} < 1 \iff 3-\sqrt{13} < 2 \iff 1 < \sqrt{13} \iff 1 < 13$$

Ainsi : $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Dans ce cas les solutions sont donc tous les réels de l'intervalle $[1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}]$.
Finalement l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathscr{S} = [-2;1[\cup \left[1\,;\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right] = \left[-2\,;\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]}$$

(b) Soit l'inéquation $|x+1| \leq \sqrt{x^2-3x+2}$.
Elle est bien définie dès que $x^2-3x+2 \geq 0$; ce trinôme a discriminant $\Delta = 9-8 = 1 > 0$ et deux racines réelles 1 et 2. Ainsi l'inéquation a un sens seulement pour $x \in]-\infty;1] \cup [2;+\infty[$.

Puisque tout est positif, on élève au carré :

$$\begin{aligned} &|x+1| \leq \sqrt{x^2-3x+2} \\ \iff &(x+1)^2 \leq x^2-3x+2 \\ \iff &x^2+2x+1 \leq x^2-3x+2 \\ \iff &5x \leq 1 \\ \iff &x \leq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{5} < 1 < 2$ ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty;\frac{1}{5}\right]}$$

Exercice 5

1. Puisque $\frac{1}{x}$ est défini pour tout $x \neq 0$, et que la partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$.

2. On a $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or $1 < \sqrt{2} < 2$ donc $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. On a donc $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, d'où :

$$\boxed{f\left(\sqrt{2}\right) = 0}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1\times\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(\left(\sqrt{3}+1\right)\right.} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Or $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $2 < \sqrt{3}+1 < 3$, d'où $1 < \frac{\sqrt{3}+1}{2} < \frac{3}{2}$. On a ainsi $1 < \frac{1}{\sqrt{3}-1} < \frac{3}{2} < 2$, d'où :

$$\boxed{f\left(\sqrt{3}-1\right) = 1}.$$

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n \geq 1$ entraîne $0 < \frac{1}{n} \leq 1$: il reste un doute concernant la partie entière de $\frac{1}{n}$.

Si $n = 1$, alors $f(1) = \lfloor 1 \rfloor = 1$.

Si $n \geq 2$, alors $0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2} < 1$ donc $f(n) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}_*^-$, $n \leq -1$ entraîne $-1 \leq \dfrac{1}{n} < 0$, donc $f(n) = -1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n \leq -1 \end{cases}}$.

4. (a) Puisque $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. La partie entière étant croissante, il s'en suit

$$\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor \text{ soit } \boxed{f(a) \geq f(b)}.$$

Ceci montre que $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_*^+}$.

(b) Le résultat est inchangé dans le cas où a et b sont tous deux strictement négatifs, car deux nombres strictement négatifs sont eux aussi rangés dans le sens contraire de leur inverse. D'où $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_*^-}$.

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est un entier relatif, comme toute partie entière. $\sqrt{2}$ n'étant pas un entier relatif, $\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$.

(b) Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = 1 \iff \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \iff 1 \leq \frac{1}{x} < 2.$$

Ces réels étant strictement positifs, un passage à l'inverse donne $1 \geq x > \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]\frac{1}{2}, 1\right]}.$$

(c) De même, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = 0 \iff \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \iff 0 \leq \frac{1}{x} < 1 \iff x > 1.$$

D'où :

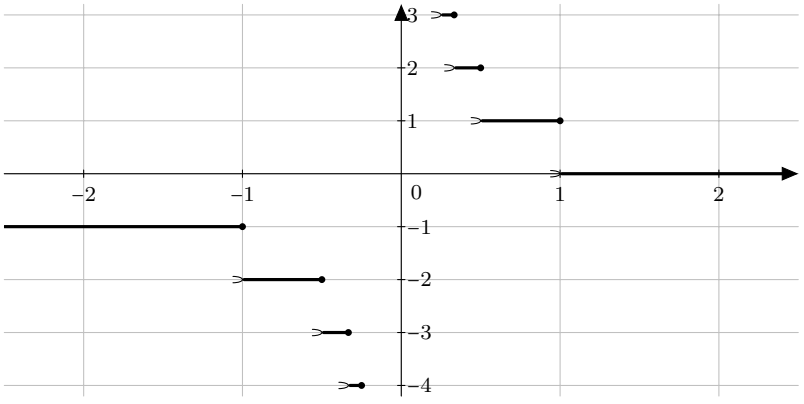
$$\boxed{\mathscr{S} =]1, +\infty[}.$$

(d) Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = k \iff \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = k \iff k \leq \dfrac{1}{x} < k + 1$.

- Si $k = 0$: le cas a été traité dans la question précédente.
- Si $k \geq 1$: les trois réels de l'encadrement précédent étant strictement positifs, un passage à l'inverse donne $\dfrac{1}{k} \geq x > \dfrac{1}{k+1}$. D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right]}$.
- Si $k = -1$: $-1 \leq \dfrac{1}{x} < 0 \iff x \leq -1$. D'où $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, -1]}$.
- Si $k \leq -2$: les trois réels de l'encadrement précédent étant strictement négatifs, un passage à l'inverse donne $\frac{1}{k+1} \geq x > \frac{1}{k}$. D'où $\boxed{\mathscr{S} = \left]\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k+1}\right]}$.

6. D'après la question précédente, on a $f(x)$ qui vaut -1 sur $]-\infty, -1]$, -2 sur $]-1, -\frac{1}{2}]$, -3 sur $]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$, … Du côté positif, $f(x)$ vaut 0 sur $]1, +\infty]$, 1 sur $]\frac{1}{2}, 1]$, 2 sur $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, … Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est constante par intervalles}}$ (f est constante sur tout intervalle de la forme $]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, pour k entier relatif non nul quelconque, ainsi que sur $]-\infty, -1]$ et sur $]1, +\infty]$).

7.



Problème

1.a) On étudie les variations sur $\mathbb{R}_+$ des 2 fonctions :

$$f(x) = \sin(x) - x \qquad ; \qquad g(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \cos(x) - 1 \qquad ; \qquad g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

Puisque $\cos(x) \leq 1$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante. Or $f(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq 0$, c'est à dire $\sin(x) \leq x$.

Pour étudier le signe de g' on la dérive (elle est dérivable) :

$$g''(x) = -\sin(x) + 1 = -f(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Donc g' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g'(0) = 0$ donc $g'(x) \leq 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $g(0) = 0$, on $g(x) \leq 0$ c'est à dire $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$. Ainsi on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x}$$

1.b) Soit $x > 0$; en divisant terme à terme par x on obtient l'encadrement :

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

Puisque $\lim_{0^+} 1 - \frac{x^2}{6} = 1$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1}.$$

1.c) Soit $x \in \mathbb{R}_-$; alors $-x \in \mathbb{R}_+$, et donc d'après 1.a)

$$-x - \frac{(-x)^3}{6} \leq \sin(-x) \leq -x \implies -(x - \frac{x^3}{6}) \leq -\sin(x) \leq -x \underset{\times(-1)}{\implies} x \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_-$:

$$\boxed{x \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6}}$$

1.d) En divisant l'inégalité obtenue en 1.c) par $x < 0$ on obtient l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad 1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

Toujours d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1}.$$

Finalement, puisque $\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \implies \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

2.a) On étudie les variations sur $\mathbb{R}_+$ des deux fonctions :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x) \qquad ; \qquad g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

elles sont dérivables, de dérivées :

$$f'(x) = -x + \sin(x) \qquad ; \qquad g'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6}$$

Il découle de l'encadrement obtenu en 1.a) que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) \leq 0 \qquad ; \qquad g'(x) \leq 0$$

Ainsi f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+$; puisque $f(0) = g(0) = 0$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) \leq 0 \text{ et } g(x) \leq 0 \implies \boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

2.b) Soit $x \in \mathbb{R}_-$; alors $(-x) \in \mathbb{R}_+$, et donc d'après l'inégalité précédente :

$$1 - \frac{(-x)^2}{2} \leq \cos(-x) \leq 1 - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^4}{24} \implies 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

2.c) On en déduit l'encadrement de $1-\cos(x)$:

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$
$$\underset{\times(-1)}{\Longrightarrow} -1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} \leq -\cos(x) \leq -1+\frac{x^2}{2}$$
$$\underset{+1}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} \leq 1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; en divisant par $x^2 > 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{2}-\frac{x^2}{24} \leq \frac{1-\cos(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Et d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}.$$