

Lycée Fénélon  
Année 2021-22

BCPST1

## Mathématiques

### Devoir surveillé n° 1

Samedi 2 octobre 2021

Durée : 2 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

*L'usage des calculatrices est interdit.*

#### Exercice 1. Encadrement et inégalité triangulaire

On considère deux nombres réels  $a$  et  $b$  vérifiant :  $1 \leq |a| \leq 3$  et  $2 \leq |b| \leq 4$ .

À l'aide de l'inégalité triangulaire, donner l'encadrement de :  $\frac{|a+1|}{|b-1|}$ .

Justifier que l'encadrement obtenu est le plus fin possible, en donnant des valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles chaque inégalité est en fait une égalité.

#### Exercice 2. Équations du second degré à paramètres

Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble  $\mathcal{S}_m$  des solutions ; on discutera en fonction des valeurs du paramètre réel  $m$ .

1) L'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  où  $m$  est un paramètre réel :

$$x^2 + 1 = -mx$$

À résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

2) Le système d'inconnues réelles  $x, y$  où  $m$  est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x \times y = m \end{cases}$$

#### Exercice 3. Inéquations

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $|2x - 1| \leq |x - 2|$ .

b)  $x - 1 \leq \sqrt{x + 1}$ .

- c)  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < \sqrt{2}$ .
- 2) a) Résoudre l'inéquation (E)  $|x-1| + |x-2| \geq 1$ .
- b) Retrouver le résultat obtenu à la question précédente en appliquant l'inégalité triangulaire.

### Exercice 4 : Quelques récurrences.

- 1) Prouver que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,  $12^n - 7^n$  est un multiple de 5.
- 2) On rappelle que pour un entier naturel  $n$ , "factorielle  $n$ ", noté  $n!$ , est défini par :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k.$$

- a) Déterminer le plus petit nombre entier naturel non nul  $n_0$  pour lequel  $2^{n_0} \leq n_0!$ .
- b) Démontrer que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $2^n \leq n!$ .
- 3) On considère une suite de nombres définie par :
- $$u_0 = 2, u_1 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$
- Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + (-2)^n$ .

### Exercice 5. Un peu de logique

Soit un ensemble de 30 animaux qui sont soit mâle soit femelle, et soit carnivore soit herbivore. On considère les énoncés suivants :

$P$  : " Tout mâle est carnivore ".

$Q$  : "Il existe un mâle carnivore et il existe une femelle carnivore".

- 1) Traduisons  $P$  par l'implication : "mâle"  $\implies$  "carnivore".
- a) Donner la contraposée de cette implication.  
Comparer sa valeur de vérité avec celle de  $P$ .
- b) Donner la réciproque de cette implication.  
Comparer sa valeur de vérité avec celle de  $P$ .
- c) Donner la négation de cette implication.  
Comparer sa valeur de vérité avec celle de  $P$ .
- 2) On note  $A$  l'ensemble des 30 animaux, et les sous-ensembles suivants de  $A$  :  
 $M, F, C, H$ , des animaux respectivement mâles, femelles, carnivores, herbivores.  
(Par exemple  $M \cap H$  est l'ensemble des mâles herbivores parmi ces 30 animaux).
- a) Écrire les énoncés  $P$  et  $Q$  à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques.
- b) Donner la négation de  $P$  puis la négation de  $Q$ .
- 3) Parmi les énoncés suivants quels sont ceux qui sont vrais? On ne demande pas de justification.  
Pour ces 30 animaux :

- a) Pour prouver que  $P$  est vrai, il suffit de vérifier que tous les herbivores sont des femelles.
- b) Pour prouver que  $P$  est faux, il est nécessaire de vérifier que tous les males sont herbivores.
- c) Pour prouver que  $Q$  est vrai, il suffit de trouver une femelle carnivore.
- d) Pour prouver que  $Q$  est vrai, il est nécessaire de trouver une femelle carnivore.
- e) Pour prouver que  $Q$  est faux, il est nécessaire de vérifier que les 30 animaux sont herbivores.