

Exercice 1

Soit a et b vérifiant : $1 \leq |a| \leq 3$ et $2 \leq |b| \leq 4$. Appliquons l'inégalité triangulaire pour encadrer $|a+1|$ et $|b-1|$:

- Encadrement de $|a+1|$; on applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} ||a| - |1|| &\leq |a+1| \leq |a| + |1| \\ \iff ||a| - 1| &\leq |a+1| \leq |a| + 1 \end{aligned}$$

D'une part (majoration) : $|a| + 1 \leq 3 + 1 = 4$.

D'autre part (minoration) :

$$\begin{aligned} 1 &\leq |a| \leq 3 \\ \implies 1 - 1 &\leq |a| - 1 \leq 3 - 1 \\ \implies 0 &\leq |a| - 1 \leq 2 \\ \implies 0 &\leq ||a| - 1| \leq 2 \\ \implies 0 &\leq ||a| - 1| \end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement de $|a+1|$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||a| - 1| \leq |a+1| \leq |a| + 1 \leq 4 \\ \implies &\boxed{0 \leq |a+1| \leq 4} \end{aligned}$$

- Encadrement de $|b-1|$; on applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} ||b| - |-1|| &\leq |b-1| \leq |b| + |-1| \\ \implies ||b| - 1| &\leq |b-1| \leq |b| + 1 \end{aligned}$$

D'une part (majoration) : $|b| + 1 \leq 4 + 1 = 5$.

D'autre part (minoration) :

$$\begin{aligned} 2 &\leq |b| \leq 4 \\ \implies 2 - 1 &\leq |b| - 1 \leq 4 - 1 \\ \implies 1 &\leq |b| - 1 \leq 3 \\ \implies 1 &\leq ||b| - 1| \leq 3 \\ \implies 1 &\leq ||b| - 1| \end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement de $|b-1|$:

$$\begin{aligned} 1 &\leq ||b| - 1| \leq |b-1| \leq |b| + 1 \leq 5 \\ \implies &\boxed{1 \leq |b-1| \leq 5} \end{aligned}$$

- Encadrement de $\frac{|a+1|}{|b-1|}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |a+1| \leq 4 \quad \text{et} \quad 1 \leq |b-1| \leq 5 \\ \implies 0 &\leq |a+1| \leq 4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{5} \leq \frac{1}{|b-1|} \leq 1 \\ \implies &\boxed{0 \leq \frac{|a+1|}{|b-1|} \leq 4} \end{aligned}$$

- Montrons que les bornes sont atteintes :

– Pour $a = -1$ et $b = 2$ on a bien $1 \leq |a| \leq 3$ et $2 \leq |b| \leq 4$ et :

$$\frac{|a+1|}{|b-1|} = \frac{0}{1} = 0$$

ce qui montre que la minoration obtenue peut-être atteinte.

– Pour $a = 3$ et $b = 2$ on a bien $1 \leq |a| \leq 3$ et $2 \leq |b| \leq 4$ et :

$$\frac{|a+1|}{|b-1|} = \frac{4}{1} = 4$$

ce qui montre que la majoration obtenue peut-être atteinte.

Ainsi l'encadrement obtenu est le plus fin possible.

Exercice 2

1. On a

$$x^2 + 1 = -mx \iff x^2 + mx + 1 = 0$$

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ \Delta = 0 &\iff m \in \{-2, 2\} \\ \Delta < 0 &\iff m \in]-2, 2[\end{aligned}$$

Considérons 3 cas :

- Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Il y a deux solutions réelles distinctes, $\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[, \mathcal{S}_m = \left\{ \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}; \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \right\}}$$

- Si $m \in \{-2, 2\}$.

Il y a une solution réelle, $\frac{-m}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } m \in \{-2, 2\}, \mathcal{S}_m = \left\{ -\frac{m}{2} \right\}}$$

- Si $m \in]-2, 2[$.

Il n'y a aucune solution réelle.

$$\boxed{\text{Si } m \in]-2, 2[, \mathcal{S}_m = \emptyset}$$

2. Un couple (x, y) de réels est solution du système :

$$\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x \times y = m \end{cases}$$

si et seulement si x et y sont les deux racines réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) du trinôme $x^2 - (m+1)x + m$. Il a pour discriminant

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0.$$

On considère deux cas :

- Si $m = 1$.

Alors $\Delta = 0$ et $x = y = \frac{m+1}{2} = -1$. Il y a un seul couple solution :

$$\boxed{\text{Si } m = 1, \mathcal{S}_m = \left\{ \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} \right) \right\} = \{(1, 1)\}}$$

- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Alors $\Delta > 0$ et les solutions du trinôme sont les deux réels :

$$\frac{m+1 \pm \sqrt{(m-1)^2}}{2} = \frac{m+1 \pm |m-1|}{2}.$$

Il y a deux couples solutions : Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\mathcal{S}_m = \left\{ \left(\frac{m+1 - |m-1|}{2}, \frac{m+1 + |m-1|}{2} \right); \left(\frac{m+1 + |m-1|}{2}, \frac{m+1 - |m-1|}{2} \right) \right\}$$

On pourrait en dire plus :

$$\text{Si } m > 1 : \mathcal{S}_m = \{(1, m); (m, 1)\}$$

$$\text{Si } m < 1 : \mathcal{S}_m = \{(m, 1); (1, m)\}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \mathcal{S}_m = \{(m, 1); (1, m)\}}$$

Exercice 3

1) a) Résolution de $|2x - 1| \leq |x - 2|$.

Les deux termes étant positifs on peut les élever au carré :

$$\begin{aligned} |2x - 1| \leq |x - 2| &\iff (2x - 1)^2 \leq (x - 2)^2 \\ &\iff 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 - 4x + 4 \\ &\iff 3x^2 - 3 \leq 0 \\ &\iff x^2 - 1 \leq 0 \\ &\iff x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = [-1, 1]}$$

b) Résolution de $x - 1 \leq \sqrt{x + 1}$.

• L'inéquation est bien définie lorsque $x + 1 \geq 0$ (à cause de la racine carrée), c'est-à-dire lorsque $x \in [-1; +\infty[$.

• *Premier cas* : Si $x - 1 \leq 0$ ($\iff x \in]-\infty; 1]$).

L'inégalité est toujours vérifiée, car une racine carrée est toujours positive. On obtient dans ce cas l'ensemble solution :

$$\mathcal{S}_1 =]-\infty; 1] \cap [-1; +\infty[= [-1; 1].$$

- Deuxième cas : Si $x - 1 > 0$ ($\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$).
L'inéquation est équivalente, en élevant au carré, à :

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &\leq \sqrt{x+1}^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &\leq x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x-3) &\leq 0\end{aligned}$$

Le membre de gauche est un trinôme ayant pour racines 0 et 3 ; il est négatif entre ses racines, c'est-à-dire lorsque $x \in [0, 3]$. Dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_2 = [0, 3] \cap [-1; +\infty[= [0, 3].$$

- Ainsi l'inéquation a pour ensemble de solutions : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-1; 1] \cup [0, 3] = [-1, 3]$.

$$\boxed{\mathcal{S} = [-1, 3]}$$

c) Résolution de $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < \sqrt{2}$.

- L'inéquation est bien définie lorsque $x \neq 1$ (à cause du dénominateur).
- Tout est positif, on obtient une inéquation équivalente en élevant au carré :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right|^2 &< \sqrt{2}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} &< 2 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 &< 2(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &< 2x^2 - 4x + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 &> 0\end{aligned}$$

On est donc amené à étudier le signe du trinôme $x^2 - 6x + 1$; pour cela on détermine ses racines :

$$\Delta = 6^2 - 4 = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2 > 0$$

$$2 \text{ racines réelles : } x_1, x_2 = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Ainsi $x^2 - 6x + 1 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 3 - 2\sqrt{2}[\cup]3 + 2\sqrt{2}; +\infty[$.

- Pour obtenir les solutions de l'inéquation, il faut encore exclure la valeur 1, en laquelle l'inéquation n'est pas définie. Or : $3 - 2\sqrt{2} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$, puisque :

$$3 - 2\sqrt{2} < 1 < 3 + 2\sqrt{2} \xLeftrightarrow[-3]{-2\sqrt{2} < -2 < 2\sqrt{2}} \xLeftrightarrow[/2]{-\sqrt{2} < 1 < \sqrt{2}}.$$

Ainsi, on obtient finalement : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; 3 - 2\sqrt{2}[\cup]3 + 2\sqrt{2}; +\infty[}$

- 2) a) Soit (E) $|x-1| + |x-2| \geq 1$. Les deux membres de l'inégalité sont définis sur $\mathbb{R}$ et positifs. On peut donc élever au carré terme à terme, on obtient une inéquation équivalente à (E) :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (|x-1| + |x-2|)^2 \geq 1^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (x-2)^2 + 2|x-1||x-2| \geq 1 && \text{car } |X|^2 = X^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2) \geq 1 && \text{car } |X||Y| = |X.Y| \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 + |2x^2 - 6x + 4| \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5 - 1 + |2x^2 - 6x + 4| \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 \geq -|2x^2 - 6x + 4|\end{aligned}$$

Or pour tout $X \in \mathbb{R}$ on a $|X| \geq X \geq -|X|$, et donc la dernière inégalité est vraie pour tout réel x . Puisqu'elle est équivalente à (E), l'ensemble des solutions de (E) est tout $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \mathbb{R}}$$

- b) D'après l'inégalité triangulaire :

$$|a-b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

Ainsi, en posant $a = (x-1)$ et $b = (x-2)$, on obtient que pour tout réel x :

$$\begin{aligned}|x-1 - (x-2)| &\leq |x-1| + |x-2| \\ \Leftrightarrow 1 &\leq |x-1| + |x-2|\end{aligned}$$

On retrouve donc que l'inéquation (E) admet pour solutions tous les réels.

Exercice 4

1) Procédons par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, $12^n - 7^n = 12^0 - 7^0 = 1 - 1 = 0$ qui est bien multiple de 5. L'assertion est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que $12^n - 7^n$ soit multiple de 5 pour un entier naturel n fixé.

$$\begin{aligned} 12^{n+1} - 7^{n+1} &= 12 \times 12^n - 7 \times 7^n \\ &= (5 + 7) \times 12^n - 7 \times 7^n \\ &= 5 \times 12^n + 7 \times 12^n - 7 \times 7^n \\ &= \underbrace{5 \times 12^n}_{\text{multiple de 5}} + \underbrace{7 \times (12^n - 7^n)}_{\text{multiple de 5 (HR)}} \end{aligned}$$

Ainsi $12^{n+1} - 7^{n+1}$ est somme de deux multiples de 5 ; il est donc aussi multiple de 5. L'assertion demeure donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, 12^n - 7^n$ est multiple de 5.

2) a)

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
$n!$	1	2	6	24

Le plus petit entier naturel non nul n pour lequel $2^n \leq n!$ est $n_0 = 4$.

b) Procédons par récurrence.

Initialisation. D'après la question précédente, l'assertion $2^n \leq n!$ est vraie au rang 4.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$, supposons que $2^n \leq n!$ (HR).

Par produit, on a $2 \times 2^n \leq 2n!$ c'est-à-dire $2^{n+1} \leq 2n!$ (*)

On a $n \geq 4$ et en particulier $2 \leq n + 1$, en multipliant par $n!$, on obtient $2n! \leq (n + 1)n!$ c'est-à-dire $2n! \leq (n + 1)!$ (**)

D'après (*) et (**) et par transitivité, $2^{n+1} \leq (n + 1)!$. L'assertion est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1; 2; 3\}, 2^n \leq n!$

3) Démontrons cette assertion par récurrence à deux pas.

Initialisation.

$$u_0 = 2 \text{ et } 1 + (-2)^0 = 1 + 1 = 2.$$

$$u_1 = -1 \text{ et } 1 + (-2)^1 = 1 - 2 = -1.$$

L'assertion $u_n = 1 + (-2)^n$ est vraie aux rangs 0 et 1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 1 + (-2)^n$ et $u_{n+1} = 1 + (-2)^{n+1}$ (HR).

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -u_{n+1} + 2u_n = -(1 + (-2)^{n+1}) + 2(1 + (-2)^n) \text{ par HR} \\ &= 1 - (-2)^{n+1} + 2(-2)^n = 1 - (-2)(-2)^n + 2(-2)^n = 1 + 2(-2)^n + 2(-2)^n \\ &= 1 + 4(-2)^n = 1 + (-2)^2(-2)^n = 1 + (-2)^{n+2} \end{aligned}$$

L'assertion est vraie au rang $n + 2$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + (-2)^n$

Exercice 5

1 a) La contraposée est : "herbivore" $\implies$ "femelle".

Elle a même valeur de vérité que P .

b) La réciproque est : "carnivore" $\implies$ "mâle".

On ne peut rien dire de sa valeur de vérité en fonction de celle de P .

c) La négation est : "mâle" et "herbivore".

Elle a une valeur de vérité contraire à celle de P .

2 a)

$$P: \quad \forall x \in A, (x \in M \implies x \in C)$$

$$Q: \quad (\exists x \in A, x \in M \cap C) \wedge (\exists x \in A, x \in F \cap H)$$

b)

$$\neg P: \quad \exists x \in A, (x \in M) \wedge (x \notin C)$$

$$\neg Q: \quad (\forall x \in A, x \notin M \cap C) \vee (\forall x \in A, x \notin F \cap H)$$

3 Les assertions vraies sont : a) et d). Toutes les autres sont fausses.