

Lycée Fénelon
Année 2020-21

BCPST1

Mathématiques
Devoir surveillé n° 2
Samedi 14 novembre 2021
Durée : 3 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

L'usage des calculatrices est *interdit*.

Exercice 1. *Calcul de $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$*

Le but de l'exercice est de calculer les valeurs exactes de $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$.

1. Développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^5$.
2. En déduire l'expression de $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
3. En déduire que $x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation :

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 \quad (*)$$

4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.
5. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
6. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2. *Trois calculs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$*

Dans cet exercice on propose deux méthodes de calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1) Soit $u = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $v = \frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}$ et $z = \frac{u}{v}$.

- a) Écrire z sous forme algébrique.
- b) Écrire z sous forme trigonométrique.
- c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

- a) Écrire z^2 sous forme algébrique.
- b) Calculer le module de z^2 et un argument de z^2 .
- c) En déduire le module de z et un argument de z .
- d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) On considère l'équation $(E) : z^2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$.

- a) Résoudre l'équation (E) ; on écrira ses solutions sous forme exponentielle.

Dans la suite on cherche les solutions de (E) sous la forme algébrique $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- b) Calculer la valeur de $a^2 + b^2$.
 - c) Déterminer tous les réels a et b pour lesquels $z = a + ib$ est solution de (E).
 - d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 4) Vérifier que les résultats trouvés pour les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ par les 3 méthodes sont cohérents.

Exercice 3. Calcul de sommes.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier ≥ 2 .

- 1) Calculer les sommes suivantes à l'aide de télescopes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) & \text{b)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad \text{c)} \quad \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ \text{d)} & \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} & \text{Indication : trouver } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1} \end{array}$$

- 2) Calculer les sommes doubles suivantes :

Tous les résultats exprimés doivent être sous forme factorisée

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i \times j & \text{b)} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} \quad \text{c)} \quad \text{Montrer : } \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| = \frac{n(n^2 - 1)}{3} \end{array}$$

- 3) Soient α et β deux réels. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha + (n - k)\beta).$$

- 4) Soit θ un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Exprimer de deux façons $(1 + i \tan(\theta))^n$ puis en déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \tan^{2k} \theta \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \tan^{2k+1} \theta.$$

Exercice 4. Des sommes pas si complexes

Dans toute cette partie, n désigne un entier fixé et > 1 , et $w = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

On considère l'équation d'inconnue complexe :

$$Z^n = 1 \tag{E}$$

Ses solutions sont appelées les *racines n -ièmes de l'unité*.

1) Dans cette question l'entier n est égal à 3.

- a) Montrer que $\omega^0 = 1$, $w^1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $w^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ sont des racines 3-ièmes de l'unité.
 b) Calculer les sommes :

$$1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1 + e^{\frac{4i\pi}{3}} + e^{\frac{8i\pi}{3}}$$

Dans toute la suite, n est un entier > 1 quelconque.

- 2) a) Montrer que w est solution de l'équation (E).
 En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{q=0}^{n-1} w^q = 1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}.$$

- b) Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le nombre w^k est solution de l'équation (E).
 En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{q=0}^{n-1} (w^k)^q = 1 + w^k + (w^k)^2 + \dots + (w^k)^{n-1}$$

(on prendra bien garde à distinguer 2 cas).

- 3) a) Soit $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ un entier.

Développer $(1 + \omega^q)^n$ pour l'exprimer à l'aide du symbole $\sum$.

b) Montrer que
$$\sum_{q=0}^{n-1} (1 + w^q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{q=0}^{n-1} (w^k)^q.$$

c) En déduire que
$$\sum_{q=0}^{n-1} (1 + \omega^q)^n = 2n.$$

d) Procéder de même pour montrer que
$$\sum_{q=0}^{n-1} (1 - \omega^q)^n = n + (-1)^n n.$$