

Lycée Fénelon  
Année 2021-22

BCPST1

## Mathématiques

### Devoir surveillé n° 2

Samedi 13 novembre 2021

Durée : 3 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

***L'usage des calculatrices est interdit.***

#### Exercice 1. Fonctions $\operatorname{ch}$ et $\operatorname{sh}$

On considère les deux fonctions réelles  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  :

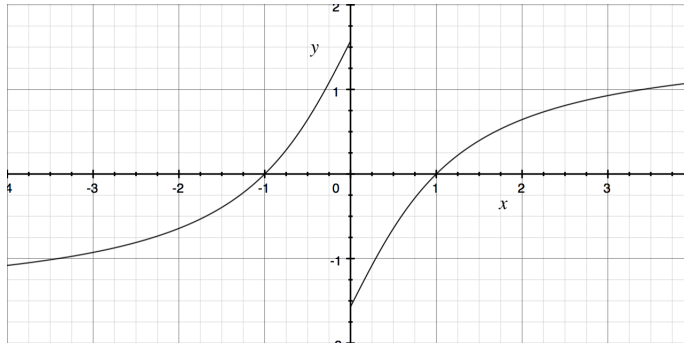
$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- 1) Déterminer les ensembles de définition des fonction  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .
- 2) Étudier la parité de ces deux fonctions.
- 3) Calculer les valeurs de  $\operatorname{ch}(x)$  et  $\operatorname{sh}(x)$  en  $x = 0$ ,  $x = \ln(2)$ ,  $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ , puis en  $x = \ln(n)$  et  $x = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 4) Montrer que  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  sont dérivables, et exprimer leurs fonctions dérivées à l'aide de  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .
- 5) Dresser le tableau de variation de  $\operatorname{sh}$  en précisant ses limites en  $\pm\infty$ .
- 6) Dresser le tableau de variation de  $\operatorname{ch}$  en précisant ses limites en  $\pm\infty$ .
- 7) Donner l'équation de la tangente  $\Delta$  à la courbe de  $\operatorname{sh}$  au point d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.
- 8) Sur un même graphique, tracer les courbes représentative de  $\exp$ , de  $x \mapsto \exp(-x)$ , de  $\operatorname{ch}$  et de  $\operatorname{sh}$  ainsi que la droite  $\Delta$ .

#### Exercice 2. Équations et inéquation trigonométriques

- 1) Résoudre l'équation  $1 + \cos(x) + \sin(x) = 0$
- 2) Résoudre l'inéquation  $\cos^2(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{3}{2} \leq 0$ .  
(Indication : On commencera par étudier le signe d'un trinôme)
- 3) On considère l'équation  $(E) : \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

On a tracé la courbe représentative de la fonction  $\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  où l'on voit que l'équation (E) admet au moins une solution. On souhaite déterminer toutes les valeurs exactes des solutions de (E). On pourra dans l'argumentation s'appuyer sur ce graphique.



- a) Montrer que pour tout réel  $a, b$  avec  $a, b, a - b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ ,

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

à l'aide des développements de  $\sin(a - b)$  et  $\cos(a - b)$ .

- b) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ ; simplifier l'expression  $\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$   
(on admet que cette expression est bien définie pour tout réel  $x$  non nul).
- c) Résoudre l'équation (E).

### Exercice 3. Suite définie par récurrence.

Soit  $\theta$  un réel. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = \cos(\theta)$  et pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$u_n = 2 \cos(\theta) \times u_{n-1} - u_{n-2}.$$

- 1) Compléter sur votre copie le script Python suivant pour qu'il affiche dans la console la valeur numérique du terme de rang  $n$ ,  $u_n$ , de la suite, pour les valeurs de  $\theta$  et  $n$  définies en début de script :

```
## Script pour le calcul de u_n
from math import cos, pi
theta = pi/5      # Valeur de Theta
n = 100           # Valeur de n
# Compléter à la suite ...
```

Attention : Il est interdit d'utiliser ici les résultats établis dans la suite de l'exercice.

- 2) Rappeler les expressions de  $\cos(2a)$  et  $\sin(2a)$  en fonction de  $\cos(a)$  et  $\sin(a)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .
- 3) Calculer  $u_2$ , et montrer que  $u_2$  peut se mettre sous la forme  $u_2 = \cos(\alpha)$  où  $\alpha$  est un réel à déterminer.

- 4) Montrer que  $\cos(\theta) \cos(2\theta) = \frac{1}{2} (\cos(3\theta) + \cos(\theta))$ .
- 5) Déduire des deux questions précédentes que  $u_3$  peut s'écrire sous la forme  $u_3 = \cos(\beta)$  où  $\beta$  est un réel à déterminer.
- 6) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $\cos((n-1)\theta)$  en fonction de  $\cos(n\theta)$ ,  $\cos(\theta)$ ,  $\sin(n\theta)$  et  $\sin(\theta)$ . Faire de même avec  $\cos((n-2)\theta)$ .
- 7) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \cos(n\theta)$ .

**Exercice 4.** *  tude succincte d'une fonction à valeurs entières*

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
- 2) Calculer  $f(0)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4\pi)$  et  $f(3e)$ . On rappelle que 2,7 est une approximation de  $e$  à  $\frac{1}{10}$  près.
- 3) Calculer  $f(n^2)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4) Comparer  $f(a)$  et  $f(b)$  si  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathcal{D}_f$  de sorte que  $a \leq b$ .  
Qu'en déduit-on pour  $f$  ?
- 5) Résoudre les équations suivantes :
  - a)  $f(x) = \pi$ .
  - b)  $f(x) = -1$ .
  - c)  $f(x) = 0$ .
  - d)  $f(x) = n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 6) Tracer la courbe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .
- 7) Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a l'encadrement :  $\sqrt{n} - 1 < f(n) \leq \sqrt{n}$ .
- 8) En déduire un encadrement de  $\frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$  que l'on notera  $\ell$ .
- 9) On note  $A = \left\{ \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .
  - a) Justifier que  $A$  admet une borne supérieure et une borne inférieure.
  - b) Déterminer le maximum ainsi que la borne supérieure de  $A$ .
  - c) Démontrer que  $\ell$  est la borne inférieure de  $A$ .  
(Indication. On proc  dera par l'absurde ; on pourra utiliser le fait que si une suite  $(u_n)$  converge, et si il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq m$ .)
  - d) Est-ce que  $A$  admet un minimum ?