Exercice 1

a) Puisque la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}_{\text{ch}} = \mathscr{D}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$.

b) $\boxed{\text{La fonction ch est paire}}$. En effet, $-x \in \mathscr{D}_{\text{ch}} \iff x \in \mathscr{D}_{\text{ch}}$ et :

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \text{ch}(x).$$

$\boxed{\text{La fonction sh est impaire}}$. En effet, $-x \in \mathscr{D}_{\text{sh}} \iff x \in \mathscr{D}_{\text{sh}}$ et :

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\text{sh}(x)$$

c) Le calcul donne :

$\text{ch}(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1\,;$ $\qquad \text{sh}(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$

$\text{ch}(\ln(2)) = \dfrac{2+1/2}{2} = \dfrac{5}{4}\,;$ $\qquad \text{sh}(\ln(2)) = \dfrac{2-1/2}{2} = \dfrac{3}{4}$

$\text{ch}(\ln(1/2)) = \text{ch}(-\ln(2)) = \text{ch}(\ln(2)) = \dfrac{5}{4}\,;$ $\qquad \text{sh}(\ln(1/2)) = \text{sh}(-\ln(2)) = -\text{sh}(\ln(2)) = -\dfrac{3}{4}$

$\text{ch}(\ln(n)) = \dfrac{n+1/n}{2} = \dfrac{n^2+1}{2n}\,;$ $\qquad \text{sh}(\ln(n)) = \dfrac{n-1/n}{2} = \dfrac{n^2-1}{2n}$

$\text{ch}(\ln(1/n)) = \text{ch}(\ln(n)) = \dfrac{n^2+1}{2n}\,;$ $\qquad \text{sh}(\ln(1/n)) = -\text{sh}(\ln(n)) = \dfrac{1-n^2}{2n}$

d) Puisque exp est dérivable, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable comme composée, et ch et sh sont dérivables comme combinaisons linéaires ($\frac{1}{2}\times$ somme ou différence) de deux fonctions dérivables.

$$\text{ch}'(x) = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

$$\text{sh}'(x) = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$$

Ainsi $\boxed{\text{ch}' = \text{sh}}$ et $\boxed{\text{sh}' = \text{ch}}$.

e) Puisque $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} > 0$, la fonction sh est strictement croissante.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\text{sh}(x)$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Par imparité, sa limite en $-\infty$ est $-\infty$. D'où le tableau de variation de sh :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh$'$		$+$	
sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

e) Puisque $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$, d'après le tableau de variation de sh :

$$\text{ch}'(x) \text{ est } \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De plus puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\text{ch}(x)$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Par parité, sa limite en $-\infty$ est $+\infty$. D'où le tableau de variation de ch :

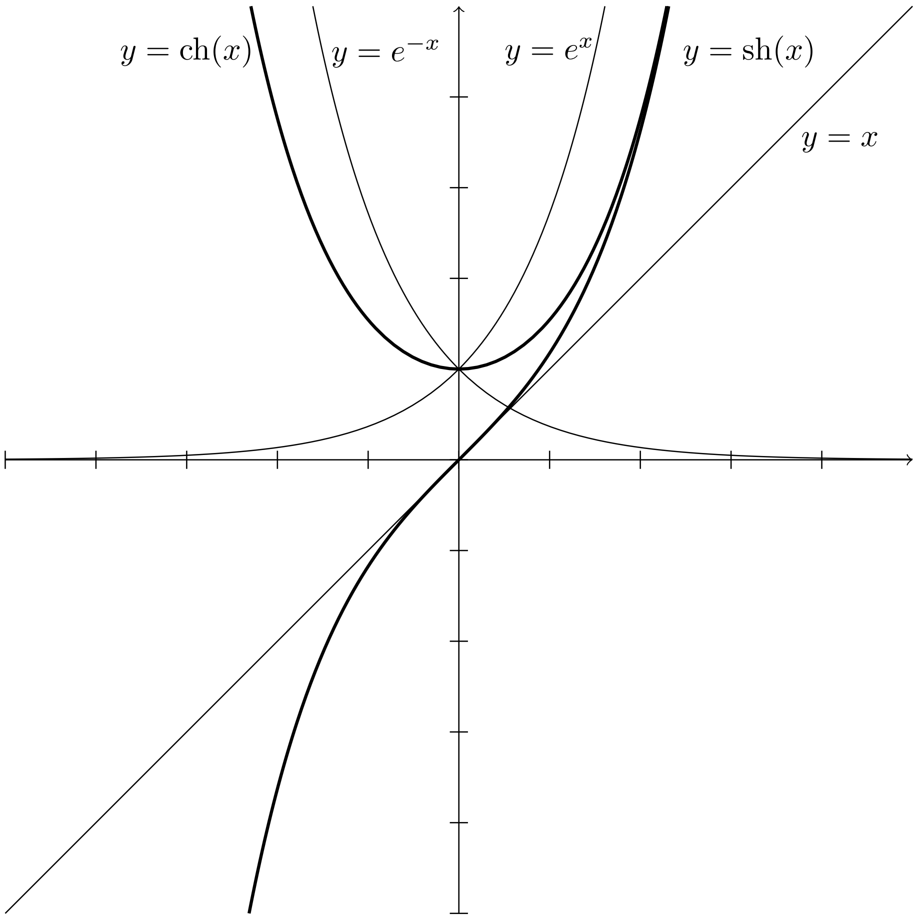
x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch$'$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

g) Puisque sh est dérivable en 0, elle admet une tangente Δ au point d'abscisse 0, d'équation : $y = \text{sh}'(0)(x-0) + \text{sh}(0)$, soit : $\Delta : \boxed{y = x}$.

Pour étudier la position de la courbe par rapport à Δ, on étudie le signe de $d(x) = \text{sh}(x) - x$. C'est une fonction dérivable, de dérivée $d'(x) = \text{ch}(x) - 1$. Or d'après son tableau de variation, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geqslant 1$ avec égalité lorsque $x = 0$, donc $d'(x) \geqslant 0$ avec égalité en $x = 0$. Ainsi $x \mapsto d(x)$ est strictement croissante, et puisque $d(0) = \text{sh}(0) - 0 = 0$, on en déduit :

- La courbe est au-dessus de Δ lorsque $x > 0$.
- La courbe est au-dessous de Δ lorsque $x < 0$.

h) Tracé des courbes représentatives :



Exercice 2

1) Résolution de $1 + \cos(x) + \sin(x) = 0$.

On commence par factoriser l'expression $\cos(x) + \sin(x)$:

$$\begin{aligned}\cos(x) + \sin(x) &= \sqrt{2}\left(\cos(x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$1 + \cos(x) + \sin(x) = 0 \iff \cos(x) + \sin(x) = -1 \iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \iff x - \frac{\pi}{4} \equiv \pm\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \pi\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right\}}$

2) On considère l'inéquation $\cos^2(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{3}{2} \leqslant 0$.

Pour la résoudre on étudie le signe du trinôme $X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{3}{2}$.

Son discriminant est $\Delta = \frac{3}{4} - 6 = \frac{27}{4} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$; ses deux racines réelles sont :

$$x_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$$

Ainsi $X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{3}{2} \leqslant 0$ si et seulement si $X \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]$.
Revenons à l'inéquation à résoudre. D'après ce qui précède

$$\cos^2(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{3}{2} \leqslant 0 \iff \cos(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right] \iff \cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

$$\cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) \geqslant \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \iff x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

D'où les solutions sur $\mathbb{R}$, par 2π-périodicité de cos :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]}$$

3) Avec $a, b, a-b \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, les 2 expressions sont bien définies.

$$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$

Puisque $a, b \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, $\cos(a)\cos(b) \neq 0$, aussi en divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$:

$$\begin{aligned}\tan(a-b) &= \frac{\dfrac{\sin(a)\cancel{\cos(b)}}{\cos(a)\cancel{\cos(b)}} - \dfrac{\sin(b)\cancel{\cos(a)}}{\cancel{\cos(a)}\cos(b)}}{\dfrac{\cancel{\cos(a)}\cancel{\cos(b)}}{\cancel{\cos(a)}\cancel{\cos(b)}} + \dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\ &= \frac{\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)} - \dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 + \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}\dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}} \\ &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

4) Pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(X)) = X$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\underset{(3)}{=} \frac{\tan(\arctan(x)) - \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{1 + \tan(\arctan(x)) \times \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= \frac{x - \dfrac{1}{x}}{1 + x \times \dfrac{1}{x}} = \frac{x - \dfrac{1}{x}}{2} = \boxed{\frac{x^2-1}{2x}}\end{aligned}$$

5) Résolvons l'équation (E) : $\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Soit x une solution de (E), alors :

$$\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \frac{x^2-1}{2x} = 1 \implies x^2 - 2x - 1 = 0$$

Ainsi toute solution de (E) est racine du trinôme $x^2 - 2x - 1$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ et ses deux racines sont :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Or comme on le voit sur le graphique, (E) admet au moins deux solutions distinctes (car $0 < \frac{\pi}{4} < 1$). L'équation (E) admet donc pour solutions

$$\mathscr{S} = \left\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right\}$$

Exercice 3

1.

```
## Script pour le calcul de u_n
from math import cos, pi

theta = pi/5    # Valeur de
n = 100         # Valeur de
# Complétion :
u, v = 1, cos(theta)    # u0 et u1
for k in range(n-1):
    u, v = v, 2*cos(theta)*v-u  # relation de récurrence
print(v)
```

2. Pour tout nombre réel a, on a les formules de duplication :

$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)}$

$\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$

3. $u_2 = 2\cos(\theta)\,u_1 - u_0 = 2\cos^2(\theta) - 1$. $\boxed{u_2 = \cos(2\theta)}$ d'après les formules de duplication.

4. On utilise les développements de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ avec $a = 2\theta$ et $b = \theta$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\cos(3\theta)+\cos(\theta)\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta+\theta)+\cos(2\theta-\theta)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\times \cos 2\theta\cos\theta = \cos\theta\cos 2\theta\end{aligned}$$

5. $u_3 = 2\cos(\theta)\,u_2 - u_1 = 2\cos(\theta)\,\cos(2\theta) - \cos(\theta)$
$= 2\times\frac{1}{2}\Big(\cos(3\theta) + \cancel{\cos(\theta)}\Big) - \cancel{\cos(\theta)}$ d'après la question précédente
$\boxed{u_3 = \cos(3\theta)}$

6. $\boxed{\cos\big((n-1)\theta\big) = \cos\big(n\theta-\theta\big) = \cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)}$

$$\begin{aligned}\cos\big((n-2)\theta\big) &= \cos\big(n\theta-2\theta\big) = \cos\big(n\theta\big)\cos\big(2\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(2\theta\big)\\ &= \cos\big(n\theta\big)\big(2\cos^2\big(\theta\big)-1\big) + \sin\big(n\theta\big)2\sin\big(\theta\big)\cos\big(\theta\big)\end{aligned}$$

$\boxed{\cos\big((n-2)\theta\big) = 2\cos\big(\theta\big)\Big(\cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big)+\sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)\Big) - \cos\big(n\theta\big)}$

7. Démontrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$.
Initialisation. L'égalité est clairement vraie au rang 1.
$\cos(0\theta) = \cos(0) = 1$ et $u_0 = 1$ donc l'égalité est vraie au rang 0.
Hérédité. Soit $n\geqslant 2$, supposons que $u_{n-2} = \cos\big((n-2)\theta\big)$ et $u_{n-1} = \cos\big((n-1)\theta\big)$. (HR)
Démontrons que $u_n = \cos\big(n\theta\big)$.
Par définition de la suite (u_n), on a : $u_n = 2\cos(\theta)u_{n-1} - u_{n-2}$.
Par hypothèse de récurrence on obtient : $u_n = 2\cos(\theta)\cos\big((n-1)\theta\big) - \cos\big((n-2)\theta\big)$.
En reportant les expressions de la question précédente dans cette égalité, on trouve :

$$\begin{aligned}u_n &= 2\cos(\theta)\Big(\cancel{\cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)}\Big)\\ &\quad -\Bigg(2\cos\big(\theta\big)\Big(\cancel{\cos\big(n\theta\big)\cos\big(\theta\big) + \sin\big(n\theta\big)\sin\big(\theta\big)}\Big) - \cos\big(n\theta\big)\Bigg)\\ &= \cos\big(n\theta\big)\end{aligned}$$
d'où l'égalité au rang n.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \cos\big(n\theta\big)}$.

Exercice 4.

1. La fonction partie entière étant définie sur $\mathbb{R}$, $f(x)$ est défini si et seulement si $\sqrt{x}$ est défini donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+}$

2. $\boxed{f(0) =}\ \lfloor\sqrt{0}\rfloor = \lfloor 0\rfloor = \boxed{0}$.

$1\leqslant 3 < 4$ donc $1\leqslant\sqrt{3} < 2$ ce qui entraîne que $\lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$. $\boxed{f(3) = 1}$.

On sait que $3\leqslant\pi<4$ donc $12\leqslant 4\pi < 16$ et en particulier $9\leqslant 4\pi < 16$.
On compose par la fonction racine carrée : $3\leqslant\sqrt{4\pi} < 4$, ce qui s'écrit également $\lfloor\sqrt{4\pi}\rfloor = 3$. $\boxed{f(4\pi) = 3}$.

On sait que $2\leqslant \mathrm{e} < 3$ donc $6\leqslant 3\mathrm{e} < 9$ et en particulier $4\leqslant 3\mathrm{e} < 9$.
On compose par la fonction racine carrée : $2\leqslant\sqrt{3\mathrm{e}} < 3$, ce qui s'écrit également $\lfloor\sqrt{3\mathrm{e}}\rfloor = 2$. $\boxed{f(3\mathrm{e}) = 2}$.

3. $\boxed{f(n^2)} = \left\lfloor\sqrt{n^2}\right\rfloor = \lfloor n\rfloor = \boxed{n}$

4. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$ tels que $a\leqslant b$.
$\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$ car la fonction racine carrée est croissante.
$\lfloor\sqrt{a}\rfloor\leqslant\lfloor\sqrt{b}\rfloor$ car la fonction partie entière est croissante.
D'où $\boxed{f(a)\leqslant f(b)}$ ce qui montre que $\boxed{f \text{ est une fonction croissante.}}$

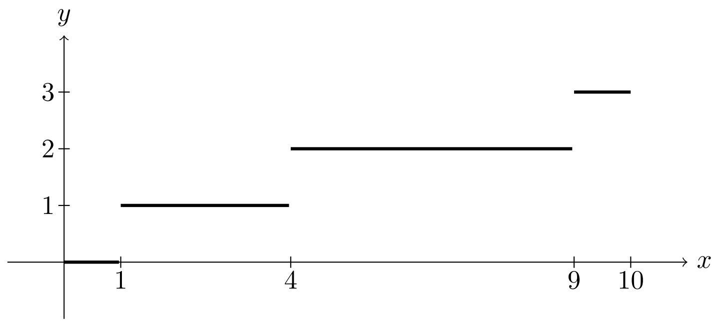
5. (a) $f(x)$ est une partie entière donc $f(x)\in\mathbb{Z}$.
$\boxed{\text{L'équation } f(x) = \pi \text{ n'a pas de solution}}$ car $\pi\notin\mathbb{Z}$.

(b) $f(x)$ est la partie entière du nombre positif $\sqrt{x}$ donc $f(x)\in\mathbb{N}$.
$\boxed{\text{L'équation } f(x) = -1 \text{ n'a pas de solution}}$ car $-1\notin\mathbb{N}$.

(c) $f(x) = 0 \iff \lfloor\sqrt{x}\rfloor = 0 \iff 0\leqslant\sqrt{x} < 1 \iff 0\leqslant x < 1$.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } f(x) = 0 \text{ est } [0,1[.}$

(d) Soit $\boxed{n\in\mathbb{N}^*}$.
$f(x) = n \iff \lfloor\sqrt{x}\rfloor = n \iff n\leqslant\sqrt{x} < n+1 \iff n^2\leqslant x < (n+1)^2$.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } f(x) = n \text{ est } [n^2,(n+1)^2[.}$

6. D'après les questions 5.(c) et 5.(d) :
$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = 0$.
$\forall x \in [1,4[,\ f(x) = 1$.
$\forall x \in [4,9[,\ f(x) = 2$.
$\forall x \in [9,10],\ f(x) = 3$.
Ceci nous permet de tracer la courbe de f sur $[0,10]$.



7. Soit n un entier naturel non nul. Par définition de la partie entière de $\sqrt{n}$, on a : $f(n) \leqslant \sqrt{n} < f(n)+1$. Retranchons $f(n)+\sqrt{n}$:
$-\sqrt{n} \leqslant -f(n) < -\sqrt{n}+1$. Multiplions par -1 :
$\boxed{\sqrt{n} \geqslant f(n) > \sqrt{n}-1}$.

8. Ajoutons 1 à l'encadrement de la question précédente :
$\sqrt{n} < f(n)+1 \leqslant \sqrt{n}+1$.
Comme dans la question précédente, on suppose que $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\sqrt{n} > 0$. En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{n}}$, il vient :
$$\boxed{1 < \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$
La suite constante 1 et la suite $1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}} = 1}$ on a donc $\boxed{\ell = 1}$.

9. (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n \geqslant 1$ donc $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{1} = 1$. On compose par la fonction inverse : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{1} = 1$. On ajoute 1 :
$1+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2$. D'après l'encadrement de la question précédente, on a alors : $1 < \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 2$ ce qui entraîne que la partie A est minorée par 1 et majorée par 2.
Par ailleurs, A est non vide car $2 = \frac{f(1)+1}{\sqrt{1}} \in A$ donc
$\boxed{A \text{ admet une borne inférieure et une borne supérieure.}}$

(b) À la question précédente on a montré que $2 \in A$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 2$.
On peut dire que 2 est un élément de A supérieur à tous les autres donc
$\boxed{2 \text{ est le plus grand élément de } A.}$
Si une partie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors c'est aussi sa borne supérieure donc $\boxed{\sup(A) = 2}$.

(c) On a vu à la question 9.(a) que 1 était un minorant de A. Montrons que c'est le plus grand. Pour cela, montrons qu'aucun réel $m > 1$ n'est un minorant de A.
Par l'absurde, supposons l'existence de $m > 1$ qui soit un minorant de A. On pose $u_n = \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$, de sorte que, puisque $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in A$:
$$\forall\, n, \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m > 1$$
On a vu à la question 8 que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 1$ donc :
$$1 = \ell \geqslant m > 1.$$
On aboutit dons à la contradiction $1 > 1$.
On peut affirmer que 1 est le plus grand des minorants de A donc $\boxed{\inf(A) = 1}$.

(d) Si A admettait un plus petit élément alors ce serait aussi sa borne inférieure c'est-à-dire 1 or à la question 8 on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$ et en particulier $1 \neq \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$ donc le plus petit élément de A ne serait pas dans A ce qui est contradictoire avec la définition du plus petit élément.
On en déduit que $\boxed{A \text{ n'a pas de plus petit élément.}}$