

Lycée Fénelon
Année 2020-21

BCPST1

Mathématiques

Devoir surveillé n° 3

Samedi 5 décembre 2020

Durée : 2 heures 30 minutes

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Une partie de la notation sera attribuée à la présentation et lisibilité de la copie, à ce que les résultats soient encadrés proprement, à la règle et en couleur, ainsi qu'à la clarté de tous les raisonnements et calculs.

L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1. Deux méthodes pour une même suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que, lorsque u_n et u_{n+1} sont définis, $u_n \neq 1 \implies u_{n+1} \neq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

On cherche à déterminer l'expression du terme général de u_n en fonction de n , de deux façons.

3. Première méthode.

- a) Justifier que l'on peut bien définir une suite $(v_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{2}$.

- c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .

En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

4. *Deuxième méthode.* (a_n) et (b_n) sont deux suites définies par $a_0 = 2, b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout entier naturel n , la propriété $\mathcal{P}_n : "a_n > 0, b_n > 0$ et $u_n = \frac{a_n}{b_n}"$ est vraie.

- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.
- c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n , puis celle de b_n , et enfin celle de u_n .

Exercice 2.

Expression du terme général d'une suite définie à l'aide d'une relation de récurrence.
(Les questions 1 et 2 sont indépendantes.)

1. On cherche à déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e^{\frac{3}{2}} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e}{u_n} \end{cases} \quad (\text{où } e = \exp(1)).$$

- (a) Montrer que (u_n) est bien définie et à termes strictement positifs.
 - (b) Écrire en Python une fonction `u(n)` prenant en argument un entier positif `n` et qui renvoie la valeur de u_n ; le nombre e sera importé de la bibliothèque `math` par l'instruction `from math import e` qui sera saisie en tout début de programme. On ne pourra pas utiliser les résultats obtenus dans la suite de l'exercice.
 - (c) On considère la suite $v_n = \ln(u_n)$. Quelle relation de récurrence vérifie (v_n) ?
 - (d) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n .
2. On cherche à déterminer l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n + 1 \end{cases} \quad (*)$$

- (a) Écrire en Python une fonction `v(n)` prenant en argument un entier positif `n` et qui renvoie la valeur de v_n . On ne pourra pas utiliser les résultats obtenus dans la suite de l'exercice.
- (b) Déterminer une suite stationnaire (w_n) vérifiant la relation de récurrence $(*)$ (c'est-à-dire $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = a$).
- (c) Lorsque (v_n) et (w_n) sont deux suites vérifiant $(*)$, montrer que la suite $(v_n - w_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
- (d) En déduire l'expression du terme général v_n en fonction de n .

Exercice 3. Calculs de sommes

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \sin^2(x) = \frac{1}{4}(\cos(x) - \cos(3x))$.

- (b) En déduire la valeur de la somme $T_n = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$ pour tout entier naturel non nul n .
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.
2. (a) Montrer que $\sum_{j=0}^n 2^{2j+1} = \frac{2}{3} (4^{n+1} - 1)$.
- (b) En déduire la valeur de la somme double $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 2^{i+j}$.
- (c) Écrire une fonction `somme(n)` en Python qui prend en argument un entier positif `n` et qui renvoie la valeur de la somme $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 2^{i+j}$. On interdit d'utiliser la valeur calculée dans la question précédente.
3. (a) Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $1 + i$.
- (b) En déduire celle du nombre $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k$.
- (c) Calculer la valeur de S_{4n} .

Exercice 4. Somme et coefficients binomiaux.

Soit n un entier naturel non nul. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n+k}$.

- Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
- Montrer que $S_n = \sum_{j=n}^{2n} j \binom{2n}{j} - \sum_{j=n}^{2n} n \binom{2n}{j}$.
Indication : on pourra effectuer un changement d'indice.
- Justifier rapidement que pour tout $j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on a $j \binom{2n}{j} = 2n \binom{2n-1}{j-1}$.
- En déduire que $S_n = 2n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}$ puis que :
$$S_n = n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} + n \sum_{j=n}^{2n} \left[\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j} \right].$$
- Exprimer $\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j}$ sous forme d'un seul coefficient binomial à l'aide de la relation de Pascal.
- En déduire la valeur de S_n .