Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: procédons par contraposition en montrant que $u_{n+1} = 1 \implies u_n = 1$. Si $u_{n+1} = 1$, alors $\frac{3u_n+1}{u_n+3} = 1$, ce qui implique $3u_n + 1 = u_n + 3$. Par soustraction, il vient $2u_n = 2$, soit $u_n = 1$. On en déduit : $u_n \neq 1 \implies u_{n+1} \neq 1$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: " u_n est défini, $u_n > 0$ et $u_n \neq 1$ " est vraie.

Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ est défini et vérifie bien $\mathcal{P}_0$.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un entier naturel n , et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Comme $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, $u_n + 3 \neq 0$ donc u_{n+1} est défini et $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3} > 0$ car $u_n > 0$. De plus, d'après la question précédente, et toujours avec l'hypothèse de récurrence, $u_n \neq 1$ entraîne $u_{n+1} \neq 1$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

En conclusion, par le principe de récurrence, (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

3. a) Puisque $u_n \neq 1$ pour tout entier naturel n , on a $u_n - 1 \neq 0$, donc la suite $(v_n)_n$ est bien définie.

$$\text{b) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n+1}{u_n+3} - 1 = \frac{3u_n+1 - (u_n+3)}{u_n+3} = \frac{2u_n-2}{u_n+3} = 2 \frac{u_n-1}{u_n+3}$$

$$\text{donc } v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{2 \frac{u_n-1}{u_n+3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n+3}{u_n-1}.$$

$$\text{Or } 2v_n + \frac{1}{2} = 2 \frac{1}{u_n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{u_n-1} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4+u_n-1}{u_n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n+3}{u_n-1}.$$

$$\text{Ceci prouve bien que } v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{2}.$$

c) Au vu de la relation de récurrence précédente, (v_n) est une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation $x = 2x + \frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{2}$. Définissons la suite auxiliaire w_n par $w_n = v_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{2} = 2v_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2v_n + 1 = 2 \left(v_n + \frac{1}{2} \right) = 2w_n : (w_n)$$

est géométrique de raison 2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times 2^n$ et donc $v_n = w_n - \frac{1}{2} = w_0 \times 2^n - \frac{1}{2}$. Or $w_0 = v_0 + \frac{1}{2} =$

$$\frac{1}{u_0-1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ D'où } v_n = \frac{3 \times 2^n - 1}{2}.$$

$$\text{Or } v_n = \frac{1}{u_n-1}, \text{ donc } u_n - 1 = \frac{1}{v_n} = \frac{2}{3 \times 2^n - 1} \text{ et } u_n = 1 + \frac{2}{3 \times 2^n - 1} = \frac{3 \times 2^n - 1 + 2}{3 \times 2^n - 1}. \text{ D'où } u_n = \frac{3 \times 2^n + 1}{3 \times 2^n - 1}.$$

d) Procédons par récurrence.

Pour $n = 0$, on a $a_0 = 2 > 0$, $b_0 = 1 > 0$ et $\frac{a_0}{b_0} = \frac{2}{1} = 2 = u_0$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons que $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ (HR) pour un entier naturel n , et montrons que $a_{n+1} > 0$, $b_{n+1} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$.

On a $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n > 0$ car $a_n > 0$ et $b_n > 0$ d'après (HR).

Pour la même raison, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n > 0$. Enfin, $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3} \stackrel{HR}{=} \frac{3 \frac{a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n} + 3} = \frac{\left(3 \frac{a_n}{b_n} + 1\right) \times b_n}{\left(\frac{a_n}{b_n} + 3\right) \times b_n} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3b_n} = \frac{(3a_n + b_n) \times \frac{1}{2}}{(a_n + 3b_n) \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n}{\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n}$, donc

$$u_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} : \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.}$$

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, on conclut que $a_n > 0$, $b_n > 0$ et

$$u_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

e) $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \right) = \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}b_n$. Or d'après la relation exprimant a_{n+1} , on a $\frac{1}{2}b_n = a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n$. En reportant dans l'égalité précédente, il vient $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2} \times \left(a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n \right) = \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{9}{4}a_n$. D'où $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

f) a_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Ses racines sont 1 et 2. Par conséquent, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda 1^n + \mu 2^n = \lambda + \mu 2^n$. Ceci entraîne $a_0 = 2 = \lambda + \mu$ et $a_1 = \frac{3}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = \frac{7}{2} = \lambda + 2\mu$. Par soustraction de ces deux égalités, il vient

$$\mu = \frac{3}{2}, \text{ puis } \lambda = 2 - \mu = \frac{1}{2}. \text{ D'où } a_n = \frac{1 + 3 \times 2^n}{2}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$ entraîne $b_n = 2a_{n+1} - 3a_n = \frac{2(1+3 \times 2^{n+1}) - 3(1+3 \times 2^n)}{2} = \frac{2+12 \times 2^n - 3 - 9 \times 2^n}{2}$ soit

$$b_n = \frac{-1+3 \times 2^n}{2}.$$

Finalement, $u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1+3 \times 2^n}{-1+3 \times 2^n}}{\frac{-1+3 \times 2^n}{2}}$ d'où $u_n = \frac{1+3 \times 2^n}{-1+3 \times 2^n}$: nous retrouvons bien la même valeur qu'avec la méthode précédente.

Exercice 2

Expression du terme général d'une suite définie à l'aide d'une relation de récurrence

1. (a) Prouvons par récurrence que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n > 0$.

Initialisation. u_0 existe et $u_0 = e^{\frac{3}{2}} > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et soit strictement positif. Alors $\frac{1}{u_n}$ existe et est > 0 et donc $u_{n+1} = \frac{e}{u_n}$ existe et est > 0 . Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.

Nous avons prouvé que (u_n) existe et est à termes strictement positifs.

(b)

```
from math import e
```

```
def U(n):
    u = e**(3/2)
    for k in range(n):
        u = e/u
    return u
```

- (c) Puisque d'après la question 1(a), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ est bien définie. Calculons : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e/u_n) = \ln(e) - \ln(u_n) = 1 - v_n$. Ainsi la suite (v_n) vérifie :

$$(v_n) \begin{cases} v_0 = \ln(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} \\ v_{n+1} = 1 - v_n \end{cases}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

- (d) Nous allons d'abord déterminer l'expression de v_n pour ensuite en déduire l'expression de u_n . Cherchons le point fixe I de la fonction de récurrence :

$$I = 1 - I \iff 2I = 1 \iff I = \frac{1}{2}$$

Posons $I = \frac{1}{2}$; la suite $(v_n - \frac{1}{2})$ est donc géométrique de raison -1 ($\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \frac{1}{2} = -(v_n - \frac{1}{2})$). On obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - \frac{1}{2} = (-1)^n(v_0 - \frac{1}{2}) = (-1)^n$, dont on déduit l'expression du terme général de (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2} + (-1)^n$$

On en déduit l'expression de $u_n = e^{v_n}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{\frac{1}{2} + (-1)^n}.$$

2. (a)

```
def V(n):
    u, v = 1, 2
    for k in range(n-1):
        u, v = v, 2*v-2*u+1
    return v
```

- (b) Une suite stationnaire en $a \in \mathbb{R}$ vérifie (*) si et seulement si $a = 2a - 2a + 1 = 1$. La seule suite stationnaire vérifiant (*) est la suite (u_n) stationnaire en 1.
- (c) Soient (v_n) et (w_n) vérifiant (*). C'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n + 1$ et $w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n + 1$. En retranchant ces 2 égalités membre à membre on obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (v_{n+2} - w_{n+2}) = 2(v_{n+1} - w_{n+1}) - 2(v_n - w_n)$$

- (d) D'après b) et c) la suite $t_n = v_n - 1$ vérifie la relation de récurrence :

$$t_{n+2} = 2t_{n+1} - 2t_n$$

C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. De plus ses deux premiers termes sont :

$$\begin{cases} t_0 = v_0 - 1 = 0 \\ t_1 = v_1 - 1 = 1 \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est (E) : $X^2 - 2X + 2 = 0$.

Son discriminant vaut $\Delta = -4 < 0$; l'équation (E) a donc deux solutions complexes conjuguées $z = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $\bar{z} = 1-i$, l'une de module

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et d'argument $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Ainsi d'après le Théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, il existe un unique couple de réels (A, B) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = (\sqrt{2})^n (A \cos(n\frac{\pi}{4}) + B \sin(n\frac{\pi}{4})).$$

On détermine A et B en particulierisant l'équation pour $n = 0$ et pour $n = 1$ pour obtenir le système linéaire :

$$\begin{cases} A = t_0 = 0 \\ \sqrt{2} \frac{A}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \frac{B}{\sqrt{2}} = t_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$. On en déduit l'expression de $v_n = t_n + 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 + (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}$$

Exercice 3

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(x) \sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{i2x} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-i2x}}{-4} \right) \\ &= -\frac{1}{8} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}) \\ &= -\frac{1}{8} (e^{i3x} - 2e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-i3x}) \\ &= -\frac{1}{8} ([e^{i3x} + e^{-i3x}] - [e^{ix} + e^{-ix}]) \\ &= -\frac{1}{8} (2 \cos(3x) - 2 \cos(x)) \end{aligned}$$

On a démontré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \sin^2(x) = \frac{1}{4} (\cos(x) - \cos(3x))}$.

(b) Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On remplace x par $\frac{\pi}{3^k}$ dans l'égalité établie à la question précédente :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{4} (\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(3\frac{\pi}{3^k}\right)) = \frac{1}{4} (\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right))$$

Additionnons les égalités précédentes pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \right) \text{ on reconnaît une somme télescopique} \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^0}\right) \right) \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1 \right)$$

Autre méthode de calcul :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \text{ chgt indice } i = k - 1 \text{ dans le } 2^{\text{e}} \sum \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{3^i}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) \right) - \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^0}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{3^i}\right) \right) \text{ par} \\ &\text{décrochage} \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1 \right)}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \cos(0) = 1$. Par somme et produit on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{2}}$$

2. (a) $2^{2j+1} = 2^{2j} \times 2^1 = 2(2^2)^j = 2 \times 4^j$ qui est le terme général d'une suite géométrique.

$$\sum_{j=0}^n 2^{2j+1} = \sum_{j=0}^n 2 \times 4^j = 2 \sum_{j=0}^n 4^j = 2 \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{2}{3} (4^{n+1} - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 2^{i+j} &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^i 2^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j 2^i 2^j = \sum_{j=0}^n 2^j \sum_{i=0}^j 2^i \\ &= \sum_{j=0}^n 2^j \frac{2^{j+1} - 1}{2 - 1} = \sum_{j=0}^n (2^{2j+1} - 2^j) = \sum_{j=0}^n 2^{2j+1} - \sum_{j=0}^n 2^j \\ &= \frac{2}{3} (4^{n+1} - 1) - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = \frac{2}{3} 4^{n+1} - \frac{2}{3} - 2^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 2^{i+j} = \frac{2 \times 4^{n+1} + 1}{3} - 2^{n+1}}$$

(c) `def somme(n):`
`S = 0`
`for i in range(n+1):`
`for j in range(i,n+1):`
`S = S + 2**(i+j)`
`return S`

3. (a) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right). \quad \boxed{1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

(b) $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} i^k = (1+i)^n$ d'après la formule du binôme de Newton
 $= \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$ d'après la question précédente
 $= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}}}$$

(c) $S_{4n} = 2^{2n} e^{in\pi} = (2^2)^n (e^{i\pi})^n = 4^n (-1)^n. \quad \boxed{S_{4n} = (-4)^n}$

Exercice 4

1. $\boxed{S_1 = 0 + \binom{2}{2} = 1.} \quad \boxed{S_2 = 0 + \binom{4}{3} + 2\binom{4}{4} = 4 + 2 = 6.}$

$$\boxed{S_3 = 0 + \binom{6}{4} + 2\binom{6}{5} + 3\binom{6}{6} = \binom{6}{2} + 2 \times 6 + 3 \times 1 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} + 12 + 3 = 30}$$

2. $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n+k} = \sum_{j=k+n}^{2n} (j-n) \binom{2n}{j}$ donc

$$\boxed{S_n = \sum_{j=n}^{2n} j \binom{2n}{j} - \sum_{j=n}^{2n} n \binom{2n}{j}.$$

3. D'après la formule du pion : $\binom{2n}{j} = \frac{2n}{j} \binom{2n-1}{j-1}$ donc $\boxed{j \binom{2n}{j} = 2n \binom{2n-1}{j-1}.$

4. $S_n \stackrel{(2.a)}{=} \sum_{j=n}^{2n} j \binom{2n}{j} - \sum_{j=n}^{2n} n \binom{2n}{j}$ donc avec (2.b) il vient :

$$\boxed{S_n = 2n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}.$$

Ainsi : $S_n = (n+n) \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}$
 $= n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} + n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}$
 $= n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} + n \left(\sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} - \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} \right).$

Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\boxed{S_n = n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} + n \sum_{j=n}^{2n} \left[\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j} \right].}$$

5. $\forall j \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, d'après les relations de Pascal, $\binom{2n}{j} = \binom{2n-1}{j} + \binom{2n-1}{j-1}$ donc

$$\boxed{\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j} = -\binom{2n-1}{j}.$$

6. Des deux questions précédentes, on déduit $S_n = n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j}.$

La somme est télescopique et peut se calculer par le changement d'indice $k = j - 1$ dans la 1^{ère} somme et $k = j$ dans la 2^e :

$$S_n = n \left[\sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \binom{2n-1}{k} \right] = n \left[\underbrace{\binom{2n-1}{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\binom{2n-1}{2n}}_{k=2n} \right].$$

Comme $\binom{2n-1}{2n} = 0$, on obtient finalement $\boxed{\sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n+k} = n \binom{2n-1}{n}.$